1.1 ► **Zeigen, dass A, B und C die Ebene E aufspannen** (5P)

Allgemein spannen drei unterschiedliche Punkte A, B und C immer genau dann eine Ebene E auf, wenn sie nicht alle auf derselben Geraden liegen. Spannen die drei Punkte eine Ebene E auf, so liegen sie in dieser Ebene.
Nun sollst du prüfen, ob die drei gegebenen Punkte A, B und C die Ebene E aufspannen. Nach der obigen Aussage musst du dafür prüfen, ob die Punkte alle in der Ebene E liegen und ob sie auf einer gemeinsamen Gerade liegen.

Betrachte dafür einen der drei Punkte, bspw. den Punkt A, als Stützpunkt der Geraden durch A und B bzw. durch A und C .
Damit alle Punkte A, B und C auf derselben Geraden liegen, müssen die Geraden durch A und B bzw. durch A und C identisch sein.

Dies ist genau dann der Fall, wenn der Punkt A auf beiden Geraden liegt und die Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ Vielfache voneinander sind. Da wir den Punkt A als Stützpunkt der Geraden durch A und B bzw. durch A und C betrachten, liegt dieser auf beiden Geraden und du musst nur noch prüfen, ob gilt:

$\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$

Es ergeben sich folgende Bedingungen an A, B und C, damit sie die Ebene E aufspannen:

- A, B und C liegen in E
- A, B und C liegen nicht auf der selben Geraden

Überprüfe also zunächst, ob die Punkte in der Ebene E liegen und dann, ob sie auf einer Geraden liegen oder nicht.

1. Schritt: Prüfen ob A, B und C in E liegen

Führe eine Punktprobe für die Punkte A, B und C durch. Setze dazu die Koordinaten der Punkte nacheinander in die gegebene Koordinatengleichung von E ein.
Resultiert eine wahre Aussage, so liegt der Punkt, dessen Koordinaten du eingesetzt hast in der Ebene E. Prüfe nacheinander die Punkte A, B und C.

Die Punkte haben die Koordinaten

$$A(5 \mid 5 \mid 5), B(6 \mid 4 \mid 5), C(5 \mid 8 \mid 2)$$

und die Koordinatengleichung von E hat die Form:

$E : x + y + z = 15$

Setzt du die Koordinaten der Punkte nun in die Koordinatengleichung ein, so erhältst du folgende Ergebnisse.

$E_A : 5 + 5 + 5 = 15 \Leftrightarrow 15 = 15$

$E_B : 6 + 4 + 5 = 15 \Leftrightarrow 15 = 15$

$E_C : 5 + 8 + 2 = 15 \Leftrightarrow 15 = 15$

Damit liegen die drei Punkte in der Ebene E. Prüfe nun die 2. Bedingung.

2. Schritt: Prüfen ob A, B und C auf einer Geraden liegen

Die gegebenen Punkte haben die Koordinaten

$$A(5 \mid 5 \mid 5),\, B(6 \mid 4 \mid 5),\, C(5 \mid 8 \mid 2).$$

Berechne aus den zugehörigen Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC}$ die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ auf über:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Nach der Vorgabe liegen die drei Punkte genau dann auf einer Geraden, wenn sie Vielfache von einander sind mit:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung kannst du als lineares Gleichungssystem mit drei Zeilen und einer Variablen auffassen. Dieses ist genau dann erfüllt, wenn in jeder Zeile das gleiche Ergebnis für k resultiert. Ergeben sich verschiedene Werte für k in den einzelnen Zeilen, so ist das Gleichungssystem nicht lösbar.

Du erhältst das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & 0 & = & k \cdot \ 1 \\
\text{II} & 3 & = & k \cdot -1 \quad | \ \cdot(-1) \\
\text{III} & -3 & = & k \cdot \ 0 \\
\hline
\text{I} & 0 & = & k \\
\text{II} & -3 & = & k \\
\text{III} & -3 & = & 0
\end{array}$$

Die 3. Zeile liefert dir eine falsche Aussage mit $-3 = 0$. Damit können die Vektoren nicht Vielfache von einander sein. Somit liegen die Punkte A, B und C nicht auf einer gemeinsamen Geraden.

In Verbindung mit der bereits gezeigten Tatsache, dass alle drei Punkte in der Ebene E liegen, folgt, dass A, B und C die Ebene E aufspannen.

1.2 ▶ Zeigen, dass g in E liegt (5P)

Es gibt folgende Lagebeziehungen, die eine Ebene und eine Gerade einnehmen können.

- Die Ebene und die Gerade verlaufen parallel.
- Die Gerade verläuft in der Ebene
- Die Gerade schneidet die Ebene in einem Schnittpunkt

In dieser Aufgabe sollst du nun prüfen, ob g in der Ebene E liegt. Liegt eine Gerade in einer Ebene E, so liegt insbesondere auch jeder Punkt, der auf der Geraden g liegt, in der Ebene E.

Jeder Punkt, der auf g liegt, lässt sich durch die Parametergleichung der Ebene beschreiben. Forme zunächst die Parametergleichung von g in einen Vektor um und setze dann die Koordinaten dieses Vektors in die Koordinatengleichung von E ein. Resultiert daraus eine wahre Aussage unabhängig vom Parameter r, so liegt g in E.

Gehe also wie folgt vor:

1. Parametergleichung von g in Vektorform umformen
2. Koordinaten in Ebenengleichung einsetzen und auf wahre Aussage prüfen

Formuliere also zunächst die Parametergleichung von E in einen Vektor um und prüfe dann die Bedingung.

1. Schritt: Parametergleichung von g in Vektorform umformen

Die Parametergleichung von g hat die Form:

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fasse diese wie folgt zu einem Vektor zusammen:

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot (-9) \\ r \cdot 9 \\ r \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 + r \cdot (-9) \\ 0 + r \cdot 9 \\ 4 + r \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 - 9 \cdot r \\ 9 \cdot r \\ 4 \end{pmatrix}$$

Prüfe nun, ob g in E liegt.

2. Schritt: Koordinaten in Ebenengleichung einsetzen

Setze die Koordinaten von g in Vektorform in die Koordinatengleichung von E ein. Es ergibt sich folgende Lösung:

$$\begin{aligned} E: x + y + z &= (11 - 9 \cdot r) + (9 \cdot r) + (4) \\ &= 11 - 9 \cdot r + 9 \cdot r + 4 \\ &= 15 + 0 \cdot r = 15 \end{aligned}$$

Somit folgt also eine wahre Aussage unabhängig von r, sodass gezeigt wurde, dass die Gerade g in E verläuft.

▶ Dreieck in Koordinatensystem einzeichnen

Nun sollst du das durch die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen bestimmte Dreieck, das von der Aufgabe als Spurdreieck bezeichnet wird, in das Material einzeichnen.

Die Bezeichnung als Spurdreieck deutet schon darauf hin, durch welche Punkte dieses Dreieck aufgespannt werden soll. Dieses Dreieck soll nämlich durch die Spurpunkte von E aufgespannt werden. Die Spurpunkte von E sind gerade die Schnittpunkte von E mit den Koordinatenachsen.

Die Koordinaten der Spurpunkte sind immer gegeben über $S_x(x \mid 0 \mid 0)$ als Schnittpunkt von E mit der x-Achse, $S_y(0 \mid y \mid 0)$ als Schnittpunkt von E mit der y-Achse und $S_z(0 \mid 0 \mid z)$ als Schnittpunkt von E mit der z-Achse.

Um diese für eine Ebene E zu bestimmen, setze die Koordinaten der allgemeinen Spurpunkte in die Koordinatengleichung ein und löst nach der gesuchten Koordinate auf.

Es ergibt sich die folgende Berechnung der Spurpunkte.

S_x :

$$E: x + 0 + 0 = 15$$
$$E: x = 15$$

S_y :

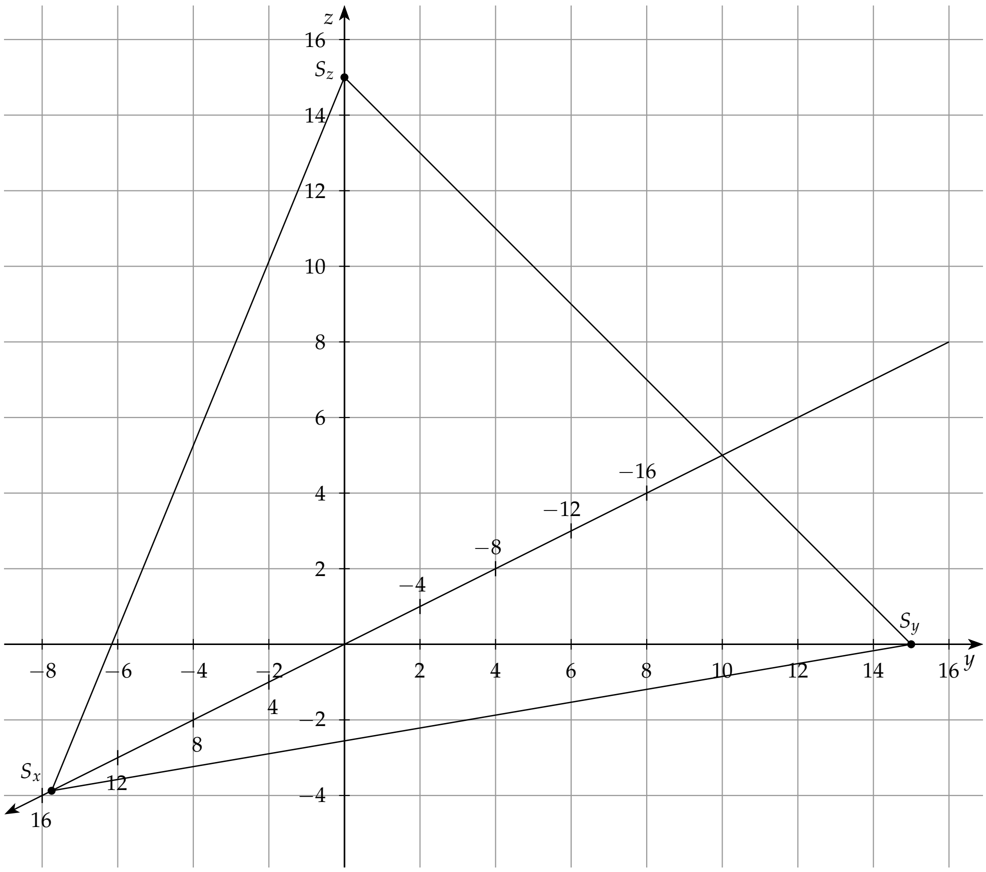
$$E: 0 + y + 0 = 15$$
$$E: y = 15$$

S_z :

$$E: 0 + 0 + z = 15$$
$$E: z = 15$$

Somit ergeben sich die Spurpunkte mit $S_x(15 \mid 0 \mid 0)$, $S_y(0 \mid 15 \mid 0)$ und $S_z(0 \mid 0 \mid 15)$.

Diese kannst du nun in das Koordinatensystem in der Anlage der Aufgabe eintragen. Verbindest du die Punkte nun noch, so erhältst du das gesuchte Dreieck.



Somit hast du das gesuchte Dreieck in das Koordinatensystem eingezeichnet.

► Gerade g in das Koordinatensystem einzeichnen

Die Gerade g hat die Geradengleichung:

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eine Gerade wird immer durch zwei nicht identische Punkte eindeutig definiert. Hast du also zwei Punkte, die auf der Geraden g liegen, so kannst du diese eindeutig in ein Koordinatensystem einzeichnen.

Einen Punkt erhältst du über den Stützvektor der gegebenen Geraden. Einen zweiten Punkt kannst du berechnen, indem du für den Parameter t einen beliebigen Wert einsetzt. Um dir die Arbeit zu erleichtern, solltest du den Parameter aber so wählen, dass sich Brüche kürzen bzw. du keinen großen Rechenaufwand hast.

Der Stützvektor von g hat die Form

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich der erste Punkt mit $P(11 \mid 0 \mid 4)$. Bestimme den zweiten Punkt über den Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ der Geraden. In diesem Fall kannst du den Richtungsvektor der Geraden g, der die Form

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hat, dadurch vereinfachen, dass du $r = \frac{1}{9}$ wählst. Setze nun $r = \frac{1}{9}$ in die Geradengleichung von g ein, um den gesuchten zweiten Punkt zu erhalten.

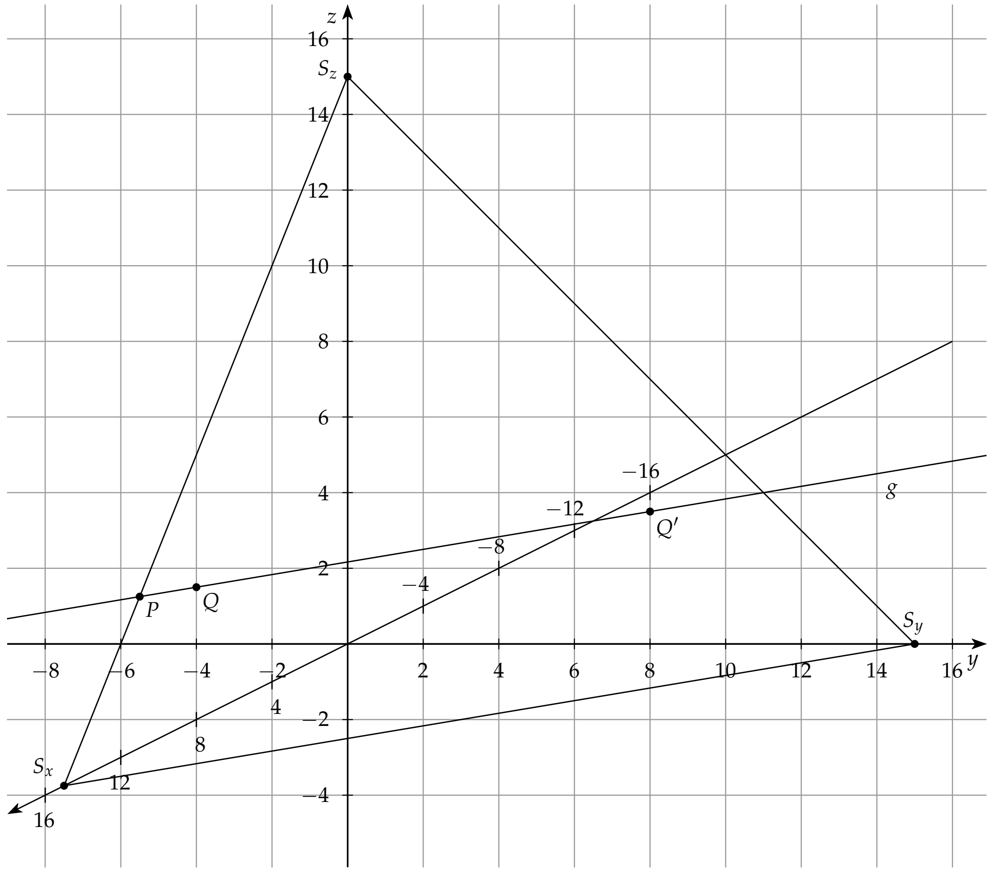
$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Damit erhältst du einen weiteren Punkt Q, der die Koordinaten $Q(10 \mid 1 \mid 4)$ hat.

Alternativ kannst du auch für $r = 1$ wählen. Dann erhältst du die Koordinaten des Punkt Q' über folgende Berechnung.

$$\overrightarrow{OQ'} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Folglich hat Q' die Koordinaten $Q'(2 \mid 9 \mid 4)$. Durch zwei dieser Punkte kannst du die Gerade eindeutig zeichnen. Im Folgenden Schaubild sind alle drei Punkte eingezeichnet.



1.3 ▶ Koordinatengleichung von F bestimmen (4P)

Du sollst nun eine Ebene F so bestimmen, dass sie senkrecht auf der x-y-Ebene steht und Gerade g enthält.

Allgemein stehen zwei Ebenen E und F senkrecht aufeinander, wenn der Normalenvektor von E einer der beiden Spannvektoren von F ist.

Eine Ebene kann immer eindeutig durch eine Gerade und einem vom Richtungsvektor der Gerade verschiedenen Richtungsvektor aufgespannt werden.

Aus diesen Vorgaben kannst du zunächst eine Parametergleichung von F aufstellen. Dazu benötigst du den Normalenvektor $\overrightarrow{n_{xy}}$ der x-y-Ebene sowie die Geradengleichung von g, die die Form

$$g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{v}$$

hat. Die Parametergleichung von F baut sich dann auf mit:

$$F: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{v} + s \cdot \overrightarrow{n_{xy}}$$

Der Normalenvektor der x-y-Ebene zeigt in Richtung der z-Achse. Dieser kann also wie folgt angegeben werden:

$$\overrightarrow{n_{xy}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Den Normalenvektor $\overrightarrow{n_F}$ von F erhältst du dann über das Vektorprodukt von $\overrightarrow{n_{xy}}$ mit dem Richtungsvektor der Gerade g.

Allgemein hat eine Koordinatengleichung dann die Form

$F: m_1 \cdot x + m_2 \cdot y + m_3 \cdot z = d,$

wobei m_1, m_2 und m_3 die Einträge von $\overrightarrow{n_F}$ sind. d erhältst du über einen Punkt der in F liegt mittels Punktprobe. Verwende dafür den Stützpunkt der Geraden g, da dieser Punkt durch die Konstruktion von F in F liegt, weil die ganze Gerade in F verlaufen soll.

Gehe also so vor:

1. Normalenvektor von F aufstellen
2. Koordinatengleichung von F berechnen.

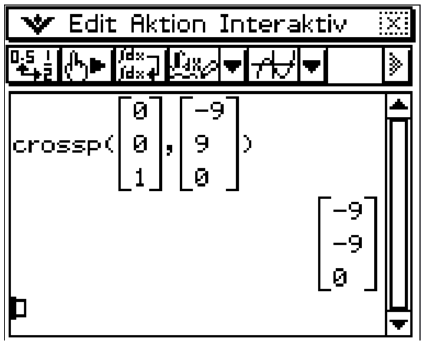
1. Schritt: Normalenvektor von F über das Vektorprodukt bestimmen

Bestimme nun den Normalenvektor von F über das Vektorprodukt des Richtungsvektors $\overrightarrow{v}$ von g mit den Normalenvektor $\overrightarrow{n_{xy}}$. Der Richtungsvektor von g lautet wie folgt und den Normalenvektor von E hast du eben bestimmt.

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{n_{xy}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechne nun das Vektorprodukt.

$$\overrightarrow{n_F} = \overrightarrow{n_{xy}} \times \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Somit hast du den gesuchten Normalenvektor berechnet.

2. Schritt: Koordinatengleichung von F berechnen

Die Koordinatengleichung von F erhältst du nun über die allgemeine Form:

$F: m_1 \cdot x + m_2 \cdot y + m_3 \cdot z = d$

Da du eben den Normalenvektor der Ebene F bestimmt hast, hast du nun alle nötigen Informationen, um die Ebenengleichung aufzustellen. Der Vektor $\overrightarrow{n_F}$ baut sich so auf:

$$\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit erhältst du folgende Koordinatengleichung von F:

$F: 1 \cdot x + 1 \cdot y = d$

Verwende nun noch den Stützpunkt von g, der die Koordinaten $P(11 \mid 0 \mid 4)$ hat, um den Parameter d zu berechnen.
Setze dafür die Koordinaten von P in die Koordinatengleichung von F ein und löse nach d auf.

$$\begin{aligned} 1 \cdot x + 1 \cdot y &= d && \text{Koordinaten von } P \text{ einsetzen} \\ 1 \cdot 11 + 1 \cdot 0 &= d \\ 11 + 0 &= d \\ d &= 11 \end{aligned}$$

Somit hast du auch den fehlenden Parameter d bestimmt, sodass sich die folgende gesuchte Koordinatengleichung ergibt.

$F: x + y = 11$

2.1 ▶ Lineares Gleichungssystem bestimmen (4P)

Du sollst nun ein lineares Gleichungssystem bestimmen, das zur Berechnung des Preises des Weiß-, Rot- bzw. Roséweins dient. Verwende dafür die Angaben, die du aus den Preisen und der Zusammensetzung der beiden Geschenksortimente erhältst.

Die Aufgabe gibt dir vor, dass es zwei Geschenksortimente A und B gibt, die sich zu verschiedenen Teilen aus Weiß-, Rot- und Roséwein zusammensetzen. Außerdem haben beide Sortimente verschiedene Preise.
Im Folgenden werden die Weinsorten mit folgenden Variablen abgekürzt.

$$w = \text{Weißwein} \qquad r = \text{Rotwein} \qquad s = \text{Roséwein}$$

Das erste Sortiment setzt sich aus je zwei Flaschen von jeder Sorte zusammen. Der Gesamtpreis beträgt 30 €. Somit ergibt sich die erste Gleichung des Gleichungssystems mit:

$$\begin{aligned} 2 \cdot w + 2 \cdot r + 2 \cdot s &= 30 && \mid :2 \\ w + r + s &= 15 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ergibt sich auf dieselbe Weise. Diesmal kostet das Sortiment allerdings 33 € und es sind 3 Flaschen Rotwein und 3 Flaschen Weißwein enthalten. Da kein Rosé enthalten ist, fällt diese Variable aus der Betrachtung heraus. Die zweite Gleichung hat also folgende Form:

$$\begin{aligned} 3 \cdot w + 3 \cdot r &= 33 && \mid :3 \\ w + r &= 11 \end{aligned}$$

Somit hast du die beiden möglichen Gleichungen aufgestellt, sodass sich folgendes LGS ergibt.

$$\begin{array}{llcl} \text{I} & w + r + s & = & 15 \\ \text{II} & w + r & = & 11 \end{array}$$

2.2 ▶ Preislisten angeben (2P)

Nun sollst mittels der Lösung, die dir von der Aufgabe gegeben wird, zwei Preislisten erstellen. Du kannst erkennen, dass der Roséwein einen Fixpreis besitzt.

Folglich kann eine Variation in der Preisliste nur durch verschiedene Preise des Rot- und Weißweins verursacht werden. Eine Flasche Rotwein hat nach der Aufgabenstellung den Preis t und eine Flasche Weißwein kostet $(11-t)$ €. Dabei soll für t gelten:

$0 \leq t \leq 11$

Du kannst nun zwei Preislisten angeben, indem du ein t wählst, dass diese Bedingung erfüllt. Damit hast du dann den Preis des Rotweins festgelegt, der dann den Preis des Weißweins eindeutig bestimmt.

Wähle beispielsweise $t_1 = 3$ und $t_2 = 5$. Dann ergeben sich die folgenden beiden Preislisten:

Preisliste 1:

Weißwein: $w = 11 - t_1 = 11 - 3 = 8$

Rotwein: $r = t_1 = 3$

Roséwein: $s = 4$

Preisliste 2:

Weißwein: $w = 11 - t_2 = 11 - 5 = 6$

Rotwein: $r = t_2 = 5$

Roséwein: $s = 4$

Somit hast du zwei Preislisten angegeben, die die Anforderungen erfüllen. Du kannst natürlich auch jede anderen Wert t wählen, für den gilt $0 \leq t \leq 11$.

2.3 ▶ Preis der einzelnen Flaschen bestimmen (4P)

Nun wird das Sortiment um ein weiteres Sortiment C erweitert. Daraus erhältst du eine weitere Gleichung, sodass du drei Gleichungen und drei Variablen gegeben hast. Folglich kannst du die Variablen eindeutig bestimmen.

Das Sortiment C soll 6 Flaschen Weiß-, 4 Flaschen Rot- und 2 Flaschen Roséwein enthalten und kostet 57 €.

Allerdings werden nur 5 Flaschen Weißwein abgerechnet. Folglich ist die 6. Flasche für die Betrachtung unwichtig, da du den Preis der Flaschen feststellen willst und diese Flasche keinen Preis besitzt.

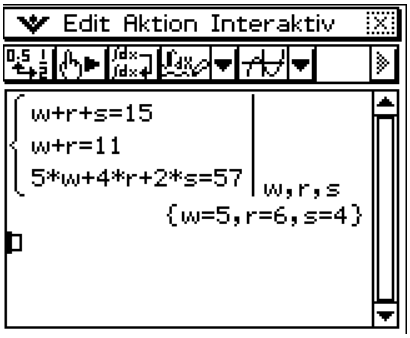
Daraus ergibt sich die folgende 3. Gleichung:

$5 \cdot w + 4 \cdot r + 2 \cdot s = 57$

Setze diese Gleichung nun mit dem LGS aus 2.1 zusammen. Daraus ergibt sich das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{I} & w & + & r & + & s & = & 15 \\ \text{II} & w & + & r & & & = & 11 \\ \text{III} & 5 \cdot w & + & 4 \cdot r & + & 2 \cdot s & = & 57 \end{array}$$

Löse dieses Gleichungssystem um die gesuchten Werte für s, w und r zu erhalten. Verwende dazu dein CAS und füge in den Calculator-Modus über `Keyboard → 2D` ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen ein und übertrage in dieses das hier vorliegende LGS (siehe unten).



Somit ergibt sich $s = 4$, $w = 5$ und $r = 6$.

2.4 ▶ **Zusammenhang zwischen den Gleichungen, Preislisten, Ebenen und Geraden erläutern** (4P)

Um den Zusammenhang der Gleichungen, Preislisten, Ebenen und Geraden zu erläutern, musst du zunächst die Gemeinsamkeiten finden. Achte dabei zunächst auf ähnliche Terme und Formulierungen.
Im zweiten Schritt musst du diese dann erklären und in den Kontext der Aufgabe einordnen. Auf diese Weise kannst du geometrische Objekte beispielsweise als Lösungen von Gleichungen bzw. Gleichungssystemen ansehen.

Betrachte zunächst die einzelnen Gleichungen sowie die geometrischen Objekte.

Gerade g: $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ebene E: $E: x + y + z = 15$

Ebene F: $F: x + y = 11$

Gleichungssystem G:
$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & w + r + s & = & 15 \\ \text{II} & w + r & = & 11 \end{array}$$

Lösung des Gleichungssystems G: $w = 11 - t, r = t, s = 4$

Du kannst erkennen, dass die Koordinatengleichungen der Ebenen E bzw. F der ersten bzw. zweiten Gleichung des Gleichungssystem entsprechen.

g ist nach der Vorgabe in Aufgabe 1 die Schnittgerade von E und F und gibt demnach an, für welche Werte für x, y und z beide Gleichungen erfüllt sind. Somit beschreibt g die allgemeine Lösungsmenge der Gleichungen I und II ohne die Einschränkung $0 \leq t \leq 11$, die dir in Aufgabe 2.2 vorgegeben wird.

Diese Tatsache lässt sich auch über die allgemeine Lösung aus 2.2 begründen.
Fasst du die einzelnen Lösungen als Komponenten eines Vektors auf, so erhälst du folgenden Vektor $\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 11 - t \\ t \\ 4 \end{pmatrix}$$

Diesen kannst du nun noch wie folgt auseinander ziehen.

$$\begin{pmatrix} 11-t \\ t \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit erhältst aus der allgemeinen Lösung eine Gerade h, die die Form

$$h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hat. Du kannst erkennen, dass die Stützvektoren von g und h identisch sind und die Richtungsvektoren sind Vielfache voneinander. Somit sind g und h identisch und beschreiben beide die allgemeine Lösung des unterbestimmten Gleichungssystems G.

Zusammenfassend kannst du sagen, dass die Ebene E gerade die Lösungen der Gleichung I beschreibt. F beinhaltet dann alle Lösungen für II.
Die Schnittgerade g von F und E ist dann gerade als Lösungsmenge beider Gleichungen formulierbar.

2.5 ▶ Auswirkungen der dritten Gleichung erläutern (2P)

In Aufgabe 2.3 gibt dir die Aufgabe eine weitere Gleichung vor. Mittels dieser konntest du das Gleichungssystem eindeutig lösen, mit der Lösung:

$s = 4$, $w = 5$ und $r = 6$

Im Aufgabenteil zuvor hast du die Gleichungen und Ebenen der vorangegangenen Aufgabenteile in Beziehung gesetzt, sodass du zu dem Ergebnis gelangt bist, dass die Ebenen als Lösungen der einzelnen Gleichungen interpretiert werden können. Die Schnittgerade beschrieb dann die Lösungsmenge beider Gleichungen.
Fasse also die 3. Gleichung auch als Ebene auf und interpretiere die eindeutige Lösung.

Durch die 3. Gleichung erhält das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung. Betrachtest du also die 3. Gleichung als neue Ebene H und die ersten beiden Gleichungen im Sinne der Ebenen E und F, so erhältst du einen eindeutigen Schnitt der drei Ebenen.
Folglich schneiden sich alle drei Ebenen in einem Punkt L. Da sich außerdem E und F bereits in der Gerade g schneiden, liegt dieser Punkt L insbesondere auf g.

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems ergibt also geometrisch interpretiert den Schnittpunkt $L(5 \mid 6 \mid 4)$