a) **► Auf Nullstellen untersuchen** (21BE)

Um die Nullstellen zu bestimmen, müssen wir $y = 0$ setzen.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \frac{2(x-1)^2}{x^2+1} &= 0 && \mid \cdot (x^2+1) \\ 2(x-1)^2 &= 0 && \mid : 2 \\ (x-1)^2 &= 0 && \mid \sqrt{} \\ x-1 &= 0 && \mid +1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Die Nullstelle befindet sich an der Stelle $x = 1$.

► Auf Polstellen untersuchen

Bei der Untersuchung auf Polstellen setzen wir den Nenner 0.

$$\begin{aligned} x^2+1 &= 0 && \mid -1 \\ x^2 &= -1 && \mid \sqrt{} \\ x &= \sqrt{-1} \Longrightarrow \text{keine Lösung} \end{aligned}$$

Da es keine Lösung gibt, gibt es auch keine Polstelle.

► Verhalten für x $\to \pm\infty$ untersuchen.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2(x-1)^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-4x+2}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1} = 2$$

► Gleichung der Asymptote angeben

Da alle Nenner gegen 0 gehen wenn man x gegen $+$ oder $-\infty$ laufen lässt, lautet die Gleichung der Asymptote $y = 2$

► Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse ermitteln

Um den Schnittpunkt mit der y-Achse zu ermitteln setzen wir $x = 0$.

$$f(0) = \frac{2(0-1)^2}{0^2+1} = \frac{2}{1} = 2$$

Der Schnittpunkt mit der y-Achse lautet $S(0 \mid 2)$.

► Art und Lage der lokalen Extrempunkte ermitteln

Um die Extrempunkte zu berechnen benötigen wir die erste und zweite Ableitung von $f(x)$. Hierfür eignet sich die Quotientenregel.

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f'(x) = \frac{(u'(x)\cdot v(x)) - (u(x)\cdot v'(x))}{(v(x))^2}$$

$$f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$$

$u = 2(x-1)^2 \qquad u' = 2\cdot 2\cdot (x-1) \qquad v = x^2+1 \qquad v' = 2x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\cdot 2\cdot (x-1)\cdot (x^2+1) - \left(2\cdot (x-1)^2 \cdot 2x\right)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4\cdot (x^3+x-x^2-1) - (4x\cdot (x^2-2x+1))}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x^3+4x-4x^2-4-4x^3+8x^2-4x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x^2-4}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4\cdot (x^2-1)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$u = 4(x^2-1) \qquad u' = 8x \qquad v = (x^2+1)^2 \qquad v' = 2(x^2+1)\cdot 2x$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{8x\cdot (x^2+1)^2 - (4(x^2-1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x)}{(x^2+1)^4} \qquad | \ (x^2+1) \text{ ausklammern und kürzen} \\ &= \frac{8x\cdot (x^2+1) - 16x^3+16x}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{8x^3+8x-16x^3+16x}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{-8x^3+24x}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{8x\cdot (-x^2+3)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

Um die Extrempunkte zu berechnen müssen folgende zwei Bedingungen erfüllt sein.
1. Bedingung $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{4\cdot (x^2-1)}{(x^2+1)^2} &= 0 \qquad | \cdot (x^2+1)^2 \\ 4\cdot (x^2-1) &= 0 \qquad |:4 \\ x^2-1 &= 0 \qquad | +1 \\ x^2 &= 1 \qquad | \sqrt{\ } \end{aligned}$$

$\Longrightarrow x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$

2. Bedingung $f''(x) \neq 0$

$$f''(1) = \frac{8\cdot 1\cdot (-1^2+3)}{(1^2+1)^3} = \frac{16}{8} = 2 > 0 \Longrightarrow \text{Tiefpunkt}$$

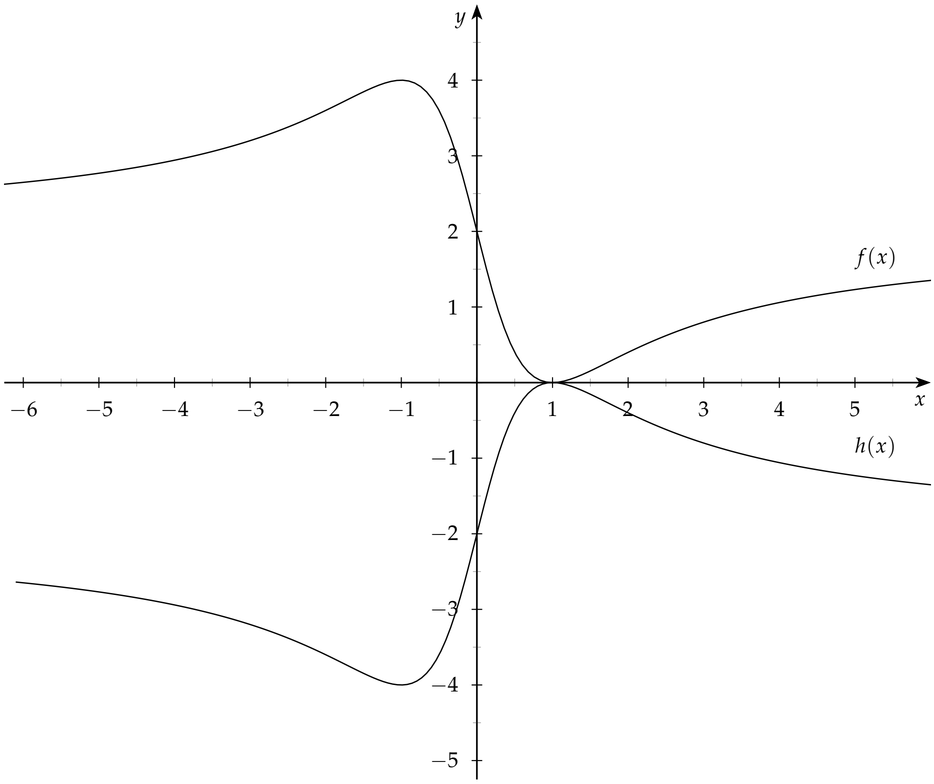
$$f''(-1) = \frac{8\cdot(-1)\cdot\left(-(-1)^2+3\right)}{\left((-1)^2+1\right)^3} = \frac{-8\cdot 2}{2^3} = \frac{-16}{8} = -2 < 0 \Longrightarrow \text{Hochpunkt}$$

$$f(1) = \frac{2(1-1)^2}{1^2+1} = 0 \Longrightarrow T(1\mid 0)$$

$$f(-1) = \frac{2((-1)-1)^2}{(-1)^2+1} = \frac{8}{2} = 4 \Longrightarrow H(-1\mid 4)$$

Der Graph hat im Punkt $T(1\mid 0)$ einen Tief- und im Punkt $H(-1\mid 4)$ einen Hochpunkt.

► Graphen zeichnen



► Entwicklung aus dem Graphen G begründen

$h(x) = -f(x)$. Durch das negative Vorzeichen wird der Graph von $f(x)$ an der x-Achse gespiegelt.

b) **► Abweichungen berechnen** (4BE)

Um die Abweichung berechnen zu können müssen wir zunächst eine lineare Funktion ermitteln, die die Funktion $f(x)$ im angegeben Intervall näherungsweise abbildet. Eine lineare Funktion $(g(x))$ setzt sich wie folgt zusammen $g(x) = mx + c$. c ist der y-Achsen-Abschnitt und ist somit 2. m lässt sich durch die erste Ableitung für $x = 0$ berechnen.

$$f'(0) = \frac{4\cdot\left(0^2-1\right)}{\left(0^2+1\right)^2} = \frac{-4}{1} = -4$$

Die Steigung beträgt -4. Somit lautet die lineare Funktion $g(x) = -4x + 2$. Um die Abweichungen an den Intervallenden $x = -0{,}4$ und $x = 0{,}4$ zu berechnen, setzen wir in die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ die x-Werte $-0{,}4$ und $0{,}4$ ein. Zum Schluss berechnen wir die Differenz aus den y-Werten von $f(x)$ und $g(x)$.

$$\begin{aligned} f(-0,4) &= \frac{2(-0,4-1)^2}{(-0,4)^2+1} = \frac{2\cdot 1,96}{1,16} \approx 3,38 \\ f(0,4) &= \frac{2(0,4-1)^2}{0,4^2+1} = \frac{2\cdot 0,36}{1,16} \approx 0,62 \\ g(-0,4) &= -4\cdot(-0,4)+2 = 1,6+2 = 3,6 \\ g(0,4) &= -4\cdot(0,4)+2 = -1,6+2 = 0,4 \end{aligned}$$

Abstand bei $x = -0,4$: $\quad g(-0,4) - f(-0,4) = 3,60 - 3,38 = 0,22$

Abstand bei $x = +0,4$: $\quad f(+0,4) - g(+0,4) = 0,62 - 0,40 = 0,22$

Die Abweichung der Funktionswerte beträgt an beiden Intervallenden $0,22$.

c) ▶ **Stammfunktion nachweisen** (5BE)

Wenn F_a die Stammfunktion von f_a sein soll, muss $F_a'(x) = f_a(x)$ sein.

$$\begin{aligned} F_a(x) &= a\left(x - \ln\left(x^2+1\right)\right) \\ F_a'(x) &= a\cdot\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x\right) \\ &= a\cdot\frac{x^2+1-2x}{x^2+1} \\ &= a\cdot\frac{(x-1)^2}{x^2+1} = f_a(x) \end{aligned}$$

▶ **Wert für a berechnen**

Aus der Funktion f_a lässt sich direkt ablesen, dass die Nullstelle nur $x = 1$ sein kann. Da die Funktion f_a mit den Koordinatenachsen eine Fläche einschließt betragen die Integrationsgrenzen $x = 0$ und $x = 1$.

$$\begin{aligned} \left[a\left(x - \ln\left(x^2+1\right)\right)\right]_0^1 &= 1 \\ \left[a\left(x - \ln\left(x^2+1\right)\right)\right]_0^1 &= 1 \\ a\left(1 - \ln\left(1^2+1\right)\right) - a\left(0 - \ln\left(0^2+1\right)\right) &= 1 \\ a\left(1 - \ln 2 + \ln 1\right) &= 1 \\ a\left(1 - \ln 2 + 0\right) &= 1 \\ a &= \frac{1}{1-\ln 2} \approx 3,26 \end{aligned}$$

Für $a \approx 3,26$ beträgt die Maßzahl der Fläche 1.