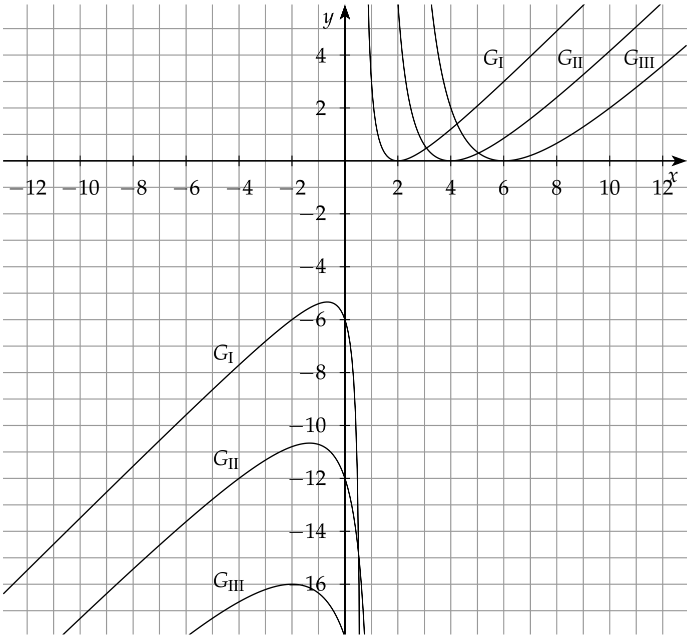
Im Bild unten sind drei Graphen der Funktionenschar mit der Gleichung f_a mit $f_a(x) = \dfrac{(x-3\cdot a)^2}{x-a}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ gegeben.



a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktionen f_a an. (5P)
Begründen Sie, dass $x = a$ eine Polstelle ist.
Bestimmen Sie eine Gleichung für die schräge Asymptote.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten und Art der lokalen Extrempunkte der Graphen von f_a. (9P)
[Kontrollergebnisse: $H_a(-a \mid -8a)$, $T_a(3a \mid 0)$]
Bestimmen Sie je eine Gleichung der Geraden, auf der die Hochpunkte bzw. die Tiefpunkte der Graphen von f_a liegen.
Begründen Sie, dass kein Graph einen Wendepunkt besitzt.

c) Geben Sie an, für welche Werte des Parameters a die Graphen gezeichnet worden sind und begründen Sie Ihre Entscheidung. (3P)

d) Betrachten Sie den Graphen von f_1. Untersuchen Sie, ob es für $x > 1$ einen Punkt $P(x \mid f_1(x))$ gibt, dessen Abstand zum Punkt $Q(1 \mid -4)$ minimal ist. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieses Punktes und seinen Abstand zu Q. (8P)

e) Im 1. Quadranten gibt es zwischen der Geraden mitder Gleichung $y = x - 5$, dem Graphen von f_1 und der x-Achse für $x \geq 3$ eine Fläche, die ins Unendliche reicht. (10P)
Prüfen Sie, ob dieser Fläche ein endlicher Flächeninhalt zugeordnet werden kann.
Diese Fläche wird jetzt rechts durch $x = 9$ begrenzt und rotiert um die x-Achse. Dabei entsteht ein nach rechts offener Hohlkörper mit kegelförmigem Hohlraum (1 LE=1 cm).
Berechnen Sie das Volumen der Wand dieses Hohlraumes.

f) Die beiden Graphenteile von f_1 sind Bestandteile eines Eisenbahnnetzes. Zwischen den beiden Extrempunkten des Graphen soll eine neue Gleisverbindung gebaut werden. Der Übergang an den beiden Punkten soll jeweils „ohne Knick"erfolgen, das heißt, in diesen beiden Punkten muss es jeweils einen gleichen Anstieg geben. (5P)
Modellieren Sie die neue Gleisverbindung durch eine ganzrationale Funktion von möglichst geringem Grad.
Als Alternative wird die Sinusfunktion mit $s(x) = 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot (x-1)\right) - 4$ in Erwägung gezogen.
Prüfen Sie, ob auch damit die geforderten Bedingungen erfüllt werden.

(40P)