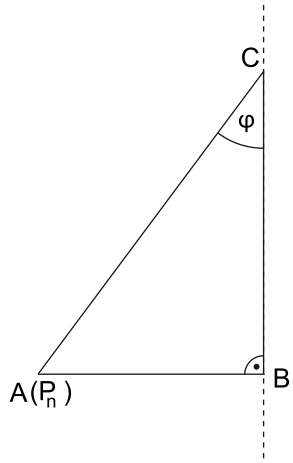
Aufgabe A1

A 1.1

▸ Begründen des Maß für die obere Intervallgrenze von φ

Hier ist dir das **rechtwinkliges Dreieck *ABC*** mit der Hypotenuse $[AC]$ gegeben. In diesem Dreieck liegen die Punkte P_n auf der Kathete $[AB]$ und legen zusammen mit den Punkten B und C die **Dreiecke P_nBC** fest.
Über den Winkel P_nCB ist dir bekannt, dass dessen Maß φ im **Intervall $]0^\circ; 39,81^\circ[$** liegt. Deine Aufgabe ist es nun, die **obere Intervallgrenze für φ** zu begründen.
Erreicht der Winkel φ seine obere Intervallgrenze von $\varphi_o = 39,81^\circ$, so liegt der Punkt P_n auf **Punkt *A***. Dies lässt sich auch an folgender **Skizze** veranschaulichen:



Da der Winkel φ mit ABC in einem rechtwinkligen Dreieck liegt, kannst du dessen obere Intervallgrenze durch die Anwendung einer **trigonometrischen Beziehung** begründen.

Da dir die Länge der Strecke $[AB]$, sowie die Länge der Strecke $[BC]$ mit $\overline{AB} = 2,5\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 3\,\text{cm}$ gegeben ist, kannst du den Winkel φ mit Hilfe des **Tangens** berechnen. Nimm dazu $[BC]$ als **Ankathete** und $[AB]$ als **Gegenkathete** zu φ an und berechne wie folgt:

$$\tan\varphi = \frac{\overline{AB}}{[BC]} = \frac{2,5\,\text{cm}}{3\,\text{cm}} = 0,833 \qquad |\ \tan^{-1}$$
$$\varphi = 39,81^\circ$$

Da sich $\varphi = 39,81^\circ$ ergeben hat, hast du die obere Intervallgrenze von φ begründet.

A 1.2

▸ Zusammenhang für Rotationsvolumen zeigen

Nun rotieren die Dreiecke P_nBC und die Gerade BC, die hier als **Rotationsachse** fungiert. Deine Aufgabe ist es nun, zu zeigen, dass für das Volumen V, der dabei entstehenden **Rotationskörper**, in Abhängigkeit vom Winkel φ, folgender Zusammenhang gilt:

$$V(\varphi) = 9 \cdot \pi \cdot \tan^2\varphi\ \text{cm}^3$$

Rotiert das Dreieck P_nBC um die Gerade BC, so entsteht ein **Kegel**. Für das Volumen eines Kegels gilt dabei im Allgemeinen:
$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$ mit:

- G : Grundfläche
- r : Radius Grundfläche
- h : Höhe

Betrachtest du das Dreieck P_nBC näher, so kannst du erkennen, dass $[CB]$ die **Höhe** des Kegels und $[BP_n]$ den **Radius** darstellt, wobei die Länge von $[BP_n]$, also $\overline{BP_n}$ von φ abhängig ist.
Willst du nun zeigen, dass hier der angegebene Zusammenhang für V gilt, so gehe wie folgt vor:

1. Schritt: Berechnen von $\overline{BP_n}$ in Abhängigkeit von φ
2. Schritt: Einsetzen aller Größen in V und vereinfachen

1. Schritt: Berechnen von $\overline{BP_n}$ in Abhängigkeit von φ

Betrachtest du P_nBC näher, so kannst du erkennen, dass es sich hier ebenfalls um ein rechtwinkliges Dreieck handelt. Verwende also auch hier wieder eine Winkelbeziehung um fortzufahren.
Mit dem Tangens solltest du hier zu folgendem Ergebnis gekommen sein:

$$\begin{aligned} \tan\varphi &= \frac{\overline{P_nB}}{\overline{BC}} \qquad \qquad | \cdot \overline{BC} \\ \overline{P_nB} &= \overline{BC} \cdot \tan\varphi = 3\,\text{cm} \cdot \tan\varphi \end{aligned}$$

2. Schritt: Einsetzen aller Größen in V und vereinfachen

Setzt du nun $\overline{P_nB} = 3\,\text{cm} \cdot \tan\varphi$ und $\overline{BC} = 3\,\text{cm}$ in die Formel für das Kegelvolumen ein, so kannst du den Zusammenhang wie folgt nachweisen:

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \overline{P_nB}^2 \cdot \overline{BC} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (3\,\text{cm} \cdot \tan\varphi)^2 \cdot 3\,\text{cm} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9\,\text{cm}^2 \cdot \tan^2\varphi \cdot 3\,\text{cm} \\ &= 9 \cdot \pi \cdot \tan^2\varphi\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Somit hast du gezeigt, dass für das Volumen des entstehende Rotationskörpers in Abhängigkeit von φ $V(\varphi) = 9 \cdot \pi \cdot \tan^2\varphi\,\text{cm}^3$ gilt.

A 1.3

▶ Berechnen des zugehörigen Winkelsmaßes φ

Nun weißt du, dass das **Volumen eines Rotationskörpers** aus A 1.2 6 $\mathbf{cm^3}$ beträgt. Deine Aufgabe ist es dabei, dass **zugehörige Maß φ** zu berechnen.
Aus der Aufgabenstellung und der vorherigen Aufgabe weißt du dazu, dass für das Volumen V der Rotationskörper, in Abhängigkeit von φ, folgender Zusammenhang gilt:

$$\boxed{V(\varphi) = 9 \cdot \pi \cdot \tan^2\varphi\,\text{cm}^3}$$

Setze nun für $V(\varphi) = 6\,\text{cm}^3$ ein und löse nach φ auf, um diese Aufgabe hier zu lösen.

Beachte beim Lösen der Gleichung, dass der Tangens hier in **quadrierter Form** vorliegt.
Hier könntest du so vorgegangen sein:

$$
\begin{aligned}
V(\varphi) &= 6\,\text{cm}^3 \\
6\,\text{cm}^3 &= 9\cdot\pi\cdot\tan^2\varphi\,\text{cm}^3 && \mid :\left(9\cdot\pi\,\text{cm}^3\right) \\
0,212 &= \tan^2\varphi && \mid \sqrt{} \\
0,461 &= \tan\varphi && \mid \tan^{-1} \\
27,73^\circ &= \varphi
\end{aligned}
$$

Das hier gesuchte Maß für φ ist also $\varphi = 27,73^\circ$. Für die Lösungmenge der Gleichung gilt also: $\mathbb{L} = \{27,73^\circ\}$.

Aufgabe A2

A 2.1

▸ Angeben der Definitionsmenge von f_1

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass der Leichtathletikverband für Wettbewerbe beim Zehnkampf **Funktionsgleichungen festlegt**, mit denen sich die jeweilige **Anzahl der Punkte**, die die Sportler in den einzelnen Disziplinen erreichen können, berechnen lassen.
Beim Weitsprung der Frauen wir die Anzahl der Punkte **in Abhängigkeit** von der **Sprungweite in x cm** durch die Funktion f_1 mit der Gleichung

$$\boxed{y = 0,188807 \cdot (x - 210)^{1,41} \quad \left(\mathbb{G} = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+\right)}$$

ermittelt. Der auf ganze Werte gerundete Wert für y ergibt die **Anzahl der erreichten Punkte**. Deine Aufgabe ist es zunächst, die **Definitionsmenge** der Funktion f_1 zu bestimmen.
Willst du die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ hier bestimmen, so betrachte die gegebene **Grundmenge $\mathbb{G}$**. Diese drückt aus, dass die Funktionswerte von f_1 **nur positive y-Werte** sein dürfen. Die Definitionsmenge von f_1 muss also so bestimmt werden, dass f_1 nur positive Werte annehmen kann.

Betrachtest du den Funktionsterm von f_1 näher, so kannst du erkennen, dass f_1 genau dann negative y-Werte annimmt, wenn x kleiner 210 ist und somit die im Funktionsterm vorliegende Klammer **negativ** wird.
Für den Definitionsbereich $\mathbb{D}$ muss hier also gelten:
$\mathbb{D} = \{x | x \geq 210\}$.

▸ Zeichnen des Graphen zu f_1

In dieser Teilaufgabe sollst du außerdem den Graphen zu f_1 in das angegebene Koordinatensystem **zeichnen.**
Orientiere dich beim Zeichnen des Graphen zu f_1 an der **gegebenen Einteilung der Koordinatenachsen** und erstelle im ersten Schritt eine passende, bei $x = 210$ beginnende, **Wertetabelle**. Wähle für die Einteilung der Wertetabelle beispielsweise **100er Schritte.**
Nutze die Wertetabelle aus dem ersten Schritt, um im zweiten Schritt den Graphen zu f_1 in das **gegebene Koordinatensystem zu zeichnen.**

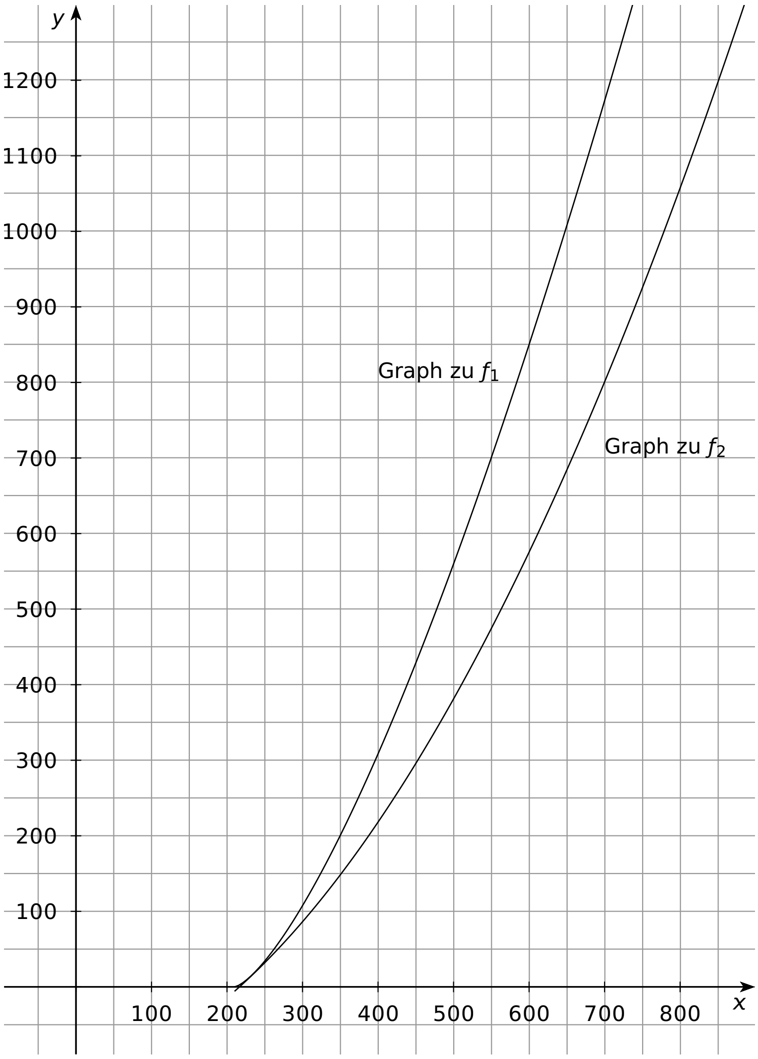
1. Schritt: Erstellen einer Wertetabelle

Die Wertetabelle für den Graphen zu f_1, in Hunderterschritten ab $x = 210$, sollte hier so aussehen:

x	210	300	400	500	600	700	800
y	0	107.52	308.36	559,76	850	1.172,72	1523,77

2. Schritt: Zeichnen des Graphen zu f_1

Zeichne nun mit Hilfe der oben erstellten Wertetabelle den Graphen zu f_1. Deine Zeichnung sollte hier so aussehen:

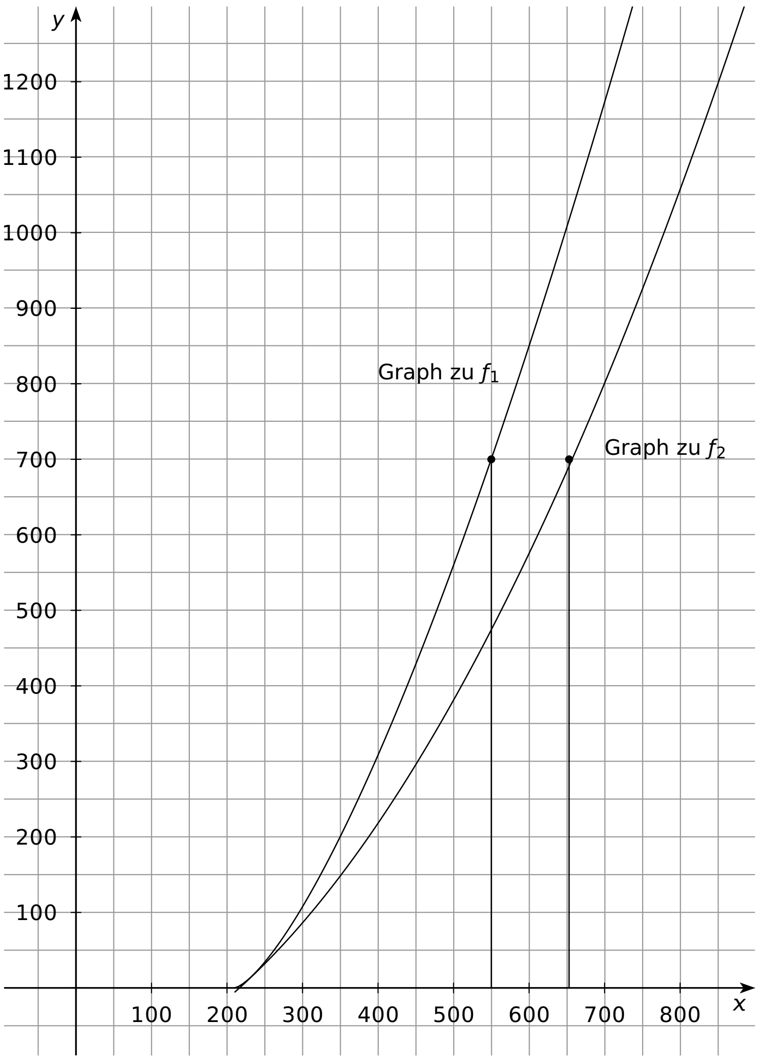


A 2.2

▶ Bestimmen, um wie viel weiter der Mann gesprungen ist

Der Aufgabenstellung kannst du nun entnehmen, dass ein Mann und eine Frau **beide** beim Weitsprung **700 Punkte** erreicht haben. Deine Aufgabe ist es dabei, zu ermitteln, um wie viel Zentimeter bzw. Meter **weiter** der Mann gesprungen ist, wobei du die Graphen hier zur Hilfe nehmen musst.
Aus dem einleitenden Text zu dieser Aufgabe ist dir bekannt, dass der x-Wert der Funktion f_1 bzw. f_2 angibt **wie weit** die Sportler gesprungen sind. Die x-Werte sind dabei **in cm** angegeben. Die zugehörigen y-Werte bzw. Funktionswerte geben dir dann an, **wie viele Punkte** die Sportler für die gesprungene Distanz erhalten.
Willst du nun anhand der Graphen zu f_1 und f_2 bestimmen, um wie viel weiter ein Mann, bei einer Bewertung von 700 Punkte, wie eine Frau gesprungen ist, ermittelst du zunächst, wie weit beide für eine solche Punktzahl überhaupt springen müssen. Trage dazu bei beiden Graphen, bei einem y-Wert von 700 **eine Senkrechte auf die x-Achse** ab. Die abgetragenen Abschnitte auf der x-Achse entsprechen dann den **gesprungenen Distanzen.**
Die **Differenz** zwischen den Werten gibt dir dann an, um wie viel weiter ein Mann als eine Frau gesprungen ist, um 700 Punkte zu erhalten.

Erweitere deine Zeichnung wie unten, um die gesprungenen Distanzen zu ermitteln:



Mit Hilfe der Graphen erhältst du hier also:

- Eine Frau muss insgesamt **5,50 m** springen, um eine Bewertung von 700 Punkte zu erhalten, während
- ein Mann insgesamt **6,50 m** springen muss, um die gleiche Bewertung zu erhalten.

Ein Mann muss also insgesamt **1,00 m** weiter springen als eine Frau, um ebenfalls eine Bewertung von 700 Punkten zu erhalten.

A 2.3

▸ Berechnen der zugehörigen Sprungweite auf Zentimeter gerundet

Nun erreicht eine Frau bei Weitsprung insgesamt **900 Punkte** und du sollst die zugehörige **Sprungweite** auf Zentimeter gerundet **berechnen.**
Beachte hier, dass es **nicht zulässig ist**, diese Aufgabe mit dem Graphen zu f_1 zu lösen. Du musst also mit **Hilfe der Funktionsgleichung von f_1** ermitteln, bei welcher Sprungweite eine Frau die Bewertung von 900 Punkte erhält.
Setze dazu die Funktionsgleichung von f_1 mit $y = 900$ **gleich** und **löse nach x**, also der **Sprungweite in cm**. Beachte beim Lösen der Gleichung folgende Punkte:

- Du musst die **Potenz** auflösen bevor, du x berechnen kannst.

- Ziehe also die entsprechende **Wurzel.**

Die hier gesucht Sprungweite solltest du wie folgt berechnet haben:

$$\begin{aligned} 900 &= 0,188807 \cdot (x-210)^{1,41} && |: 0,188807 \\ 4.766,77 &= (x-210)^{1,41} && |\ \sqrt[1,41]{} \\ 406,13 &= x-210 && |+210 \\ 616,13 &= x \end{aligned}$$

Gerundet auf Zentimeter muss eine Frau also **616 cm** weit springen, um 900 Punkte zu erhalten. Die Lösungsmenge der Gleichung ist hier: $\mathbb{L} = \{616,13\}$.

A 2.4

▶ Berechnen der übersprungenen Höhe auf Zentimeter gerundet

Zuletzt kannst du hier der Aufgabenstellung entnehmen, dass die Anzahl der Punkte beim Stabhochsprung in Abhängigkeit von der **übersprungenen Höhe in cm** durch die Funktionen h_1 und h_2 beschrieben werden können. Es gilt dabei:

- h_1: Anzahl der Punkte **für Frauen** in Abhängigkeit von x cm:
  - $y = 0,44125 \cdot (x-100)^{1,35}$
- h_2: Anzahl der Punkte **für Männer** in Abhängigkeit von x cm:
  - $y = 0,2797 \cdot (x-100)^{1,35}$

Weiterhin weißt du, dass ein Mann und eine Frau **die gleiche Höhe** überwunden haben, wobei die Frau 500 Punkte **mehr** als der Mann erzielt hat. Deine Aufgabe ist es nun, eben diese übersprungene Höhe auf Zentimeter gerundet zu berechnen.
Beachte beim Lösen der Aufgabe, dass y die **Anzahl der erreichten Punkte** angibt. Springen beide, also Mann und Frau, gleich hoch, so ist der x-Wert, welcher in h_1 bzw. h_2 für die Berechnung der Punkte eingesetzt wird, **der gleiche.**
Willst du nun diesen x-Wert berechnen, so musst du die Angabe in der Aufgabenstellung ausnutzen, die besagt, dass die Frau für den Sprung **500 Punkte mehr als der Mann erreicht hat**. Formuliere also eine Gleichung zu diesem Sachverhalt, bei der du folgendes beachtest:

- Setze h_1 und h_2 **gleich**.
- Um die Gleichung dann ins **„Gleichgewicht“** zu bringen, musst du h_2 um **500** erhöhen, da die Frau insgesamt 500 Punkte **mehr** für den Sprung erhalten hat.
- Löse die Gleichung nach x und gehe dabei vor wie im Aufgabenteil 2.3.

Nach den obigen Angaben ergibt sich hier folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} 0,44125 \cdot (x-100)^{1,35} &= 0,2797 \cdot (x-100)^{1,35} + 500 && |-0,2797 \cdot (x-100)^{1,35} \\ 0,16155 \cdot (x-100)^{1,35} &= 500 && |: 0,16155 \\ (x-100)^{1,35} &= 3.095,02 && |\ \sqrt[1,35]{} \\ x-100 &= 385,19 && |+100 \\ x &= 485,19 \end{aligned}$$

Die von beiden übersprungene Höhe gerundet auf Zentimeter beträgt also **485 cm**. Die Lösungsmenge der Gleichung ist also: $\mathbb{L} = \{485,19\}$.

Aufgabe A3

A 3.1

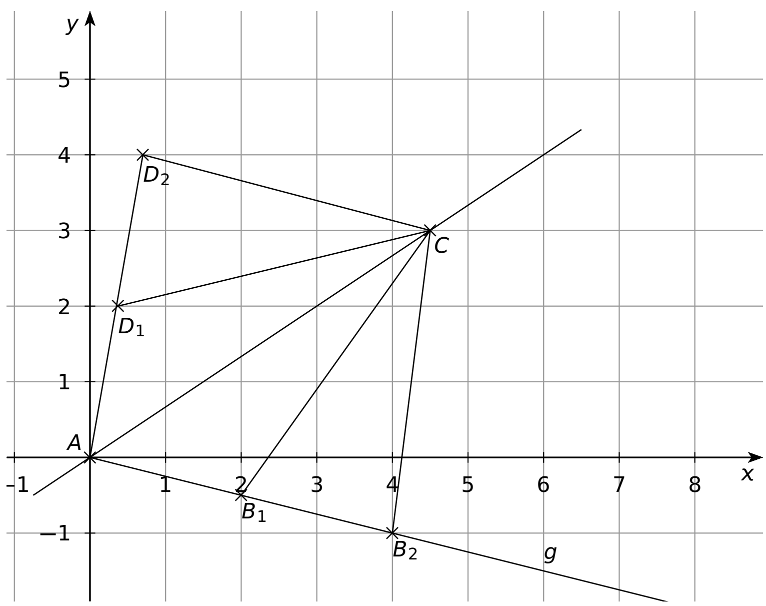
▶ Zeichnen des Sachverhalts in das gegebene Koordinatensystem

Der Aufgabenstellung kannst du hier entnehmen, dass die Punkte B_n mit $B_n\left(x \,|\, -\frac{1}{4}x\right)$ auf der Geraden g für $x \in]0;7,8[$ zusammen mit den Punkte $A(0 \,|\, 0)$, $C(4,5 \,|\, 3)$ und D_n **Drachenvierecke AB_nCD_n** bilden, mit der **Symmetrieachse AC**.
Nun sollst du hier die Gerade g, die Symmetrieachse AC sowie das **Drachenviereck AB_1CD_1** für **$x = 2$** und das **Drachenviereck AB_2CD_2** für **$x = 4$** in das gegebene Koordinatensystem **einzeichnen.**
Das heißt, du zeichnest hier:

- Drachenviereck AB_1CD_1 mit:
  - $A(0|0)$,
  - $B_2\left(1 \,|\, -\frac{2}{4} \cdot 1\right) = B_1\,(2 \,|\, -0,5)$,
  - $C(4,5|3)$
  - und D_1: B_1 gespiegelt an AC.
- Drachenviereck AB_2CD_2 mit:
  - $A(0|0)$,
  - $B_4\left(4 \,|\, -\frac{1}{4}4\right) = B_1\,(4 \,|\, -1)$,
  - $C(4,5|3)$
  - und D_2: B_2 gespiegelt an AC.
- Gerade g, mit $y = -\frac{1}{4} \cdot x$ mit $x \in]0;7,8[$

Willst du B_1 und B_2 an AC spiegeln, so nutze hier dein **Geodreieck**. Setze es im **rechten Winkel** an AC an und trage D_1 bzw. D_2 entsprechend den **Abständen** zwischen C_1 und C_2 zu AC ab.

Hast du alles korrekt eingezeichnet, so sollte dein Schaubild hier wie folgt aussehen:



A 3.2

▶ Berechnen der Koordinaten der Punkte D_n

Zuletzt sollst du hier, die von der **Abszisse x** der **Punkte B_n** abhängigen Koordinaten der **Punkte D_n** berechnen.
Das heißt, du **spiegelst** hier die Punkte B_n an der **Spiegelachse AC** um die Koordinaten der Punkte D_n zu erhalten. Beachte dabei, dass die Koordinaten von B_n von x **abhängig** sind.
Um die Punkte B_n an der Spiegelachse AC zu spiegeln, verwendest du hier die **Spiegelmatrix**, welche sich wie folgt aufbaut:

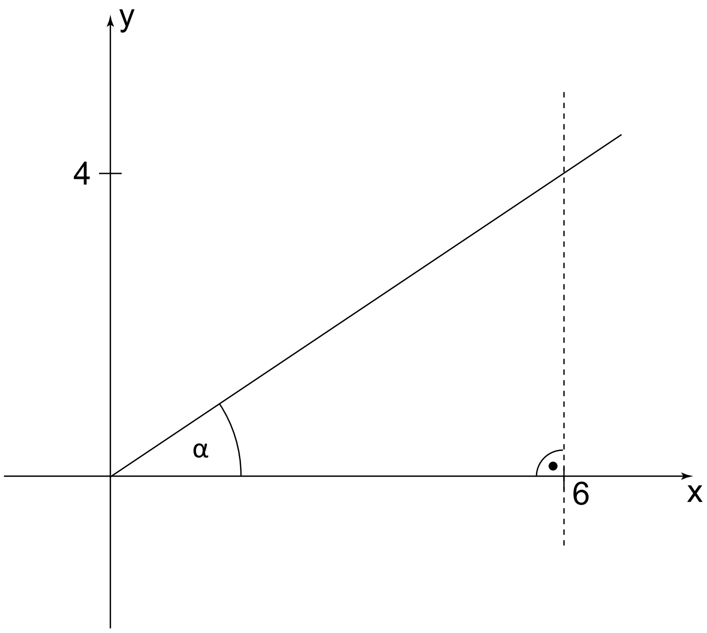
$\overrightarrow{d_n} = \begin{pmatrix} \cos 2\cdot\alpha & \sin 2\cdot\alpha \\ \sin 2\cdot\alpha & -\cos 2\cdot\alpha \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{b_n}$ mit:

- α: Winkel der Spiegelachse AC
- d_n: Koordinaten von D_n in Vektorenform
- b_n: Koordinaten von B_n in Vektorenform

Berechne hier also zunächst den **Winkel α der Spiegelachse AC** um anschließend mit diesem und der Spiegelmatrix die von x abhängigen Koordinaten von D_n zu bestimmen.

1. Schritt: Berechnen des Winkels α

Betrachtest du die in 3.1 angefertigte Zeichnung genauer, so kannst du erkennen, dass sich der Winkel α der Spiegelachse AC in folgendem **rechtwinkligem Dreieck** befindet:



Berechne hier also über eine **Winkelbeziehung** den Winkel α. Da du die Längen der Gegen- und Ankathete zu α kennst, wendest du hier den **Tangens** an:

$$\tan\alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad |\ \tan^{-1}$$
$$\alpha = 33,69^\circ$$

2. Schritt: Berechnen der von x abhängigen Koordinaten von D_n

Setze nun $\alpha = 33,69^\circ$ und $\overrightarrow{d_n} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{4}\cdot x \end{pmatrix}$ in den oben gezeigten Zusammenhang für den Vektor $\overrightarrow{d_n}$ bzw. die Koordinaten von D_n ein und berechne wie folgt:

$$\overrightarrow{d_n} = \begin{pmatrix} \cos 2\cdot\alpha & \sin 2\cdot\alpha \\ \sin 2\cdot\alpha & -\cos 2\cdot\alpha \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{b_n} = \begin{pmatrix} \cos 67,38^\circ & \sin 67,38^\circ \\ \sin 67,38^\circ & -\cos 67,38^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{4}\cdot x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,385 & 0,923 \\ 0,923 & -0,385 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{4}\cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,385\cdot x - \frac{1}{4}\cdot 0,923\cdot x \\ 0,923\cdot x + \frac{1}{4}\cdot 0,385\cdot x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,15\cdot x \\ 1,02\cdot x \end{pmatrix}$$

Die hier gesuchten Koordinaten der Punkte D_n sind also: $D_n(0,15\cdot x \,|\, 1,02\cdot x)$.