a) **▶ Achsenschnittpunkte des Graphen von g bestimmen** (13P)

Achsenschnittpunkte beschreiben die Punkte, an denen der Graph der Funktion g die Koordinatenachsen schneidet.
Man unterscheidet zwischen x- und y-Achsenschnittpunkten.

An y-Achsenschnittpunkten gilt $x = 0$ und für x-Achsenschnittpunkte musst du die Bedingung $g(x) = 0$ prüfen.

Der Graph jeder Funktion hat genau einen y-Achsenschnittpunkt.

Bestimme nun zunächst den y-Achsenschnittpunkt.

1. Schritt: y-Achsenschnittpunkt bestimmen

Nach obiger Bedingung gilt an y-Achsenschnittpunkten $x = 0$.
Bestimme also den Wert $y = g(0)$. Dieser beschreibt den y-Wert des y-Achsenschnittpunktes.

2. Schritt: Schnittpunkte mit der x-Achse bestimmen

Wir haben bereits die Bedingung aufgestellt, dass an x-Achsenschnittpunkten gilt $g(x) = 0$.

Löse die Gleichung $g(x) = 0$ folglich nach x auf.

▶ Zeigen, dass einer der Punkte auch zum Graph von f gehört

Prüfe nacheinander die Punkte, indem du die Koordinaten in die Funktionsgleichung von f einsetzt.
Prüfe zunächst den y-Achsenschnittpunkt, da dieser die Koordinaten $Q(0 \mid 0)$ hat. Dem zufolge ist er relativ einfach zu prüfen.

▶ Winkel zwischen den Tangenten im y-Achsenschnittpunkt bestimmen

Die allgemeine Tangentengleichung lautet

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Den Winkel einer Geraden gegenüber der Horizontalen kannst du über die Gleichung

$$\tan\alpha = m$$

bestimmen, wobei m die Steigung der Geraden ist. Bei Tangenten handelt es sich um Geraden, die an der jeweiligen Kurve anliegen.
Die Differenz der Winkel zwischen der jeweiligen Tangente und der Horizontalen ist dann der gesuchte Winkel. Es gilt

$$\gamma = |\alpha - \beta|$$

Der Winkel α beschreibt den Winkel von t_g zwischen der Tangente und der Horizontalen.
β ist dann der Winkel zwischen der Tangente t_f an f und der Horizontalen.

Die Betragsstriche bewirken, dass es egal ist, in welcher Reihenfolge du die beiden Winkel voneinander abziehst.

Gehe nach folgendem Prinzip vor.

1. Ableitungen von f und g bestimmen
2. Tangentengleichungen mit $x_0 = 0$ bestimmen
3. Winkel zwischen den einzelnen Tangenten und der Horizontalen bestimmen
4. γ bestimmen

Leite folglich zunächst die beiden Funktionen wie folgt ab.

b) **▶ Tiefpunkte von f und g auf einer Geraden nachweisen** (8P)

Die Tiefpunkte der Graphen der beiden Funktionen f und g sollen laut der Aufgabenstellung auf einer zur y-Achse parallelen Gerade liegen. Jede zur y-Achse parallelen Gerade wird durch einen konstanten x-Wert beschrieben.
Damit die beiden Tiefpunkte auf dieser Geraden liegen, müssen sie die selben x-Koordinaten haben.

Es gilt die notwendige Bedingung für Tiefpunkte mit $f'(x) = 0$ und die hinreichende Bedingung mit $f''(x) > 0$.
Die Aufgabe gibt dir allerdings den Hinweis, dass auf das hinreichende Kriterium verzichtet werden kann.

Setze folglich die beiden Ableitungen f' und g' gleich Null, um die Stellen der Tiefpunkte zu erhalten.
Setze diese abschließend wieder in zugehörigen Funktionsgleichungen ein. Es ergeben sich nach der Aufgabenstellung zwei Punkte, die dieselbe x-Koordinate haben.

c) **▶ Wendepunkte bestimmen** (10P)

Für Wendepunkte gilt die notwendige Bedingung $f''(x) = 0$ und die hinreichende Bedingung $f'''(x) \neq 0$.
Die Aufgabe gibt dir vor, dass es genau einen Wendepunkt für jeden der beiden Graphen gibt.
Erhältst du folglich nur ein Ergebnis für $f''(x) = 0$ bzw. für $g''(x) = 0$, so kannst du dieses als die Stelle des Wendepunktes betrachten, ohne die hinreichende Bedingung zu prüfen.

Du hast bereits die 1. Ableitung von f und g bestimmt. Leite diese folglich noch zwei weitere Male ab, um die 2. und 3. Ableitung zu erhalten.

Setze dann $g''(x) = 0$ und $f''(x) = 0$.

▶ Sachverhalt skizzieren

Der Sachverhalt setzt sich aus mehreren Teilen zusammen. Zum einen sollen die Wendepunkte diagonal gegenüberliegende Eckpunkte eines Rechtecks sein.
Dieses soll außerdem symmetrisch zur y-Achse sein. Abschließend sollst du noch die fehlenden Eckpunkte bestimmen.

1. Schritt: Koordinaten der Wendepunkte bestimmen

Bestimme zunächst die vollständigen Koordinaten der beiden Wendepunkte.

Setze dazu die bestimmten x-Werte in die jeweilige Funktionsgleichung ein und berechne die zugehörigen Werte.

2. Schritt: W_g und W_f in Koordinatensystem eintragen

Trage die beiden Wendepunkte in ein geeignetes Koordinatensystem ein. Da sie diagonal gegenüberliegende Eckpunkte sein sollen, kannst du sie mit einer Geraden verbinden.

Da das Rechteck außerdem symmetrisch zur y-Achse sein soll, beschreibt der Schnittpunkt der Diagonalen W_gW_f mit der y-Achse den Mittelpunkt M des Rechtecks.

3. Schritt: Rechteck konstruieren

Da das Rechteck symmetrisch zur y-Achse liegt, kannst du die Seiten durch W_f und W_g parallel zur y-Achse einzeichnen.
Ziehe nun einen Kreis mit dem Radius $\overline{MW_g}$ um den Mittelpunkt.
Die Schnittpunkte mit den eben eingezeichneten Seiten sind die fehlenden Eckpunkte.
Dies ist darin begründet, dass in einem Rechteck alle Eckpunkte gleich weit vom Mittelpunkt entfernt sind.

4. Schritt: Koordinaten der restlichen Eckpunkte

Aus dem Bild kannst du erkennen, dass die Seiten entweder parallel zur x- oder y-Achse verlaufen.
Somit kannst du aus dem Bild und den Koordinaten der Punkte W_g und W_f die Koordinaten von E_1 und E_2 bestimmen.

d) ▶ **F als Stammfunktion von f nachweisen** (5P)

Ist dir eine Funktion F als Stammfunktion einer bereits gegebenen Funktion f gegeben, so zeigst du am besten, dass F Stammfunktion von f ist, indem du F einmal ableitest.
Du musst den Funktionsterm von f für F' erhalten, sodass gilt $f(x) = F'(x)$.

Leite die Funktion F nach den Produktregeln und den Regeln zum Ableiten der e-Funktion ab.

▶ **Größe der Fläche bestimmen**

Das Emblem soll dargestellt werden durch die Fläche, die durch die beiden Graphen sowie der Geraden $x = 1,5$ im IV. Quadrant eingeschlossen wird.
Die Skizze in der Aufgabenstellung soll dies verdeutlichen.

Die Fläche unter Kurven kannst über das Integral bestimmen. Die Grenzen des Integrals werden durch die Aufgabe gegeben.
Aussagen aus der Aufgabenstellung, dass die Fläche durch Geraden mit $x = ...$ beschränkt werden, geben dir immer direkt die Grenzen des Integrals.
Die Skizze in der Aufgabenstellung zeigt dir, dass die Kurven durch den Ursprung laufen, sodass dir die 1. Grenze auf jeden Fall mit $x = 0$ gegeben ist.

Mit der Geraden $x = 1,5$ und der oben stehenden Bedingung ergibt sich, dass die Grenzen mit $x_1 = 0$ und $x_2 = 1,5$ festgelegt sind.

Die Fläche kannst du bestimmen, indem du die Integrale innerhalb der Grenze voneinander subtrahierst:

$$A = \left| \int_0^{1,5} g(x)\mathrm{d}x - \int_0^{1,5} f(x)\mathrm{d}x \right|$$

Die Betragsstriche dienen dazu, dass du einen positiven Flächeninhalt erhältst.

Ansonsten kann es passieren, dass der Flächeninhalt negativ wird, abhängig davon, in welcher Reihenfolge du die beiden Integrale von einander subtrahierst.

e) **► Gleichung der Parabel bestimmen** (4P)

►► Lösungsweg A: Allgemeine Parabelgleichung

Eine quadratische Parabel baut sich allgemein wie folgt auf:

$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Der Graph dieser Parabel soll den selben Tiefpunkt und den selben y-Achsenschnittpunkt haben wie der Graph der Funktion f.

Diese hast du bereits bestimmt:

Tiefpunkt: $T(1 \mid f(1))$

y-Achsenschnittpunkt: $Y_f(0 \mid 0)$

Bestimme zunächst die y-Koordinate des Tiefpunktes vom Graphen von f.

$f(1) = -1 \cdot \mathrm{e}^{-1} = -\frac{1}{\mathrm{e}} \approx -0,37$

Verwende diese Punkte nun, um die Parameter a, b und c zu bestimmen.

Da du drei Parameter hast, brauchst du auch drei Bedingungen, die du aus deinen Punkten gewinnen kannst.

Über die Koordinaten erhältst du die folgenden:

$p(0) = 0$

$p(1) = -0,37$

Die 3. Bedingung erhältst du aus der Tatsache, dass T auch Tiefpunkt des Graphen von p sein soll.

Folglich gilt an dieser Stelle für die Funktion p:

$p'(1) = 0$

Bestimme nun mittels dieser Bedingungen deine Parameter. Leite dazu zunächst die Funktion p nach x ab.

►► Lösungsweg B: Scheitelpunktform

Du kennst bereits den Tiefpunkt des Graphen von f und auch den y-Achsenschnittpunkt.

Diese lauteten wie zuvor bestimmt

$Y_f(0 \mid 0)$ und $T(1 \mid f(1))$

Bestimme zunächst den Funktionswert von f an der Stelle $x = 1$.

Da der Scheitel S einer nach oben geöffneten Parabel gleichzeitig der Tiefpunkt ist, gilt:

$T = S$

Folglich kannst du die Scheitelpunktform verwenden, um die gesuchte Funktionsgleichung zu bestimmen. Diese lautet:

$p(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$

Setze die Koordinaten von S und somit von T für x_s und y_s ein.
Mittels des y-Achsenschnittpunktes kannst du dann den Parameter a bestimmen.