a) (1) ▶ **Bestimmen der Koordinaten von Punkt *S*** (7P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass die Turmspitze S sich in 16 m Höhe über der quadratischen Grundfläche des Turms befindet. Möchtest du die Koordinaten von S bestimmen, so berechnest du zuerst die Koordinaten des Mittelpunkts M der quadratischen Grundfläche des Turms. Weil das Dach des Turms eine quadratische Pyramide ist, befindet sich die Turmspitze S direkt oberhalb des Mittelpunkts M der quadratischen Grundfläche.

(2) ▶ **Bestimmen der Koordinaten von Punkt *E***

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass der Eckpunkt E des Dachbodens auf der Geraden g und genau über dem Punkt A liegt. Da Punkt A im Koordinatenursprung liegt, befindet sich Eckpunkt E da, wo Gerade g die z - Achse schneidet. In Abhängigkeit von z besitzt E also diese Koordinaten:
$E(\,0\mid 0\mid z)$.

(3) ▶ **Bestimmen der Koordinaten von *F*, *G* und *H***

Deine Aufgabe ist es hier, die Koordinaten der weiteren Eckpunkte F, G und H des Dachbodens zu bestimmen. Dabei kannst du der Aufgabenstellung entnehmen, dass Punkt F über B, Punkt G über C und Punkt H über D liegt. Die Punkte F, G und H liegen dabei jeweils in 10 m Höhe über den jeweiligen Punkte.

b) (1) ▶ **Bestimmen einer Ebenengleichung der Ebenen E^* in Koordinatenform** (7P)

Die Normalform einer Ebenen in Koordinatenform ist:
$E^*:\ n_1\cdot x+n_2\cdot y+n_3\cdot z=d$ mit:

- $n_1,\ n_2$ und n_3: Einträge des Normalenvektors $\overrightarrow{n}$,
- d: über Punktprobe zu bestimmende Konstante.

Deine Aufgabe ist es hier, eine Gleichung der Ebenen E^*, in welcher die Dachfläche GHS liegt, in Koordinatenform aufzustellen. Willst du mit Hilfe der Koordinaten der Punkte G, H und S eine Gleichung der Ebenen E^* in Koordinatenform bestimmen, so legst du im ersten Schritt zwei Richtungsvektoren der Ebenen E^* fest, zum Beispiel: $\overrightarrow{HG}$ und $\overrightarrow{HS}$.

Im zweiten Schritt bildest du mit $\overrightarrow{HG}$ und $\overrightarrow{HS}$ den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der Ebenen E^*. Im dritten und letzten Schritt bestimmst du den Wert der Konstanten d über eine Punktprobe mit Punkt G, H oder S.

(2) ▶ **Bestimmen der Koordinaten von *P***

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass Gerade g Ebene E^* im Punkt P durchstößt. Willst du die Koordinaten von P berechnen, so formst du Gerade g zuerst als einen von s abhängigen Vektor um und setzt diesen anschließend für x, y und z in die Ebenengleichung von E^* in Koordinatenform ein. Hast du anschließend den Parameterwert für s bestimmt, für welche sich E^* und g schneiden, so setzt du diesen in die Geradengleichung von g ein und berechnest somit den zu P zugehörigen Ortsvektor.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

(3) ▶ **Berechnen des gesuchten Abstands**

An der Dachfläche GHS soll eine Hebevorrichtung angebracht werden, dazu wird im Punkt P mit den Koordinaten $P(3 \mid 4,5 \mid 13)$ ein Balken insgesamt $2 \cdot \sqrt{5}\,\mathrm{m}$ durch die Dachfläche hindurchgeführt. An dessen Spitze soll wiederum eine Rolle befestigt werden, über welche ein Seil läuft.

Deine Aufgabe ist es hier, den Abstand zu berechnen, welchen dieses Seil zur Turmwand $CDHG$ besitzt.

Bevor du jedoch den gesuchten Abstand berechnen kannst, bestimmst zu zuerst die Koordinaten des Punktes Q, an welchem das Seil über die Rolle geführt wird. Hast du die Koordinaten von Q bestimmt, so kannst du den Abstand des Seiles zur Turmwand $CDHG$ mit Hilfe der Koordinaten von Q bestimmen.

c) ▶ **Berechnen des gesuchten Winkels** (4P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass der Balken, über welchen das Seil geführt wird, an einem Träger befestigt wird, welcher wiederum an der Dachfläche EFS angebracht ist. Deine Aufgabe ist es hier, jenen Winkel zu berechnen, welchen die Dachfläche EFS und der Balken, über welchen das Seil läuft, einschließen.

Die Richtung des Balkens hast du dabei im vorherigen Aufgabenteil modelliert. Diese wird durch Gerade j dargestellt:

$$j: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \\ 13 \end{pmatrix} + r \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \\ 13 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diesen Winkel α berechnest du hier über diese Formel:

$$\sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{n} \circ \overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{u}|} \quad \text{mit:}$$

- $\overrightarrow{n}$: Normalenvektor der Dachebene EFS.
- $\overrightarrow{u}$: Richtungsvektor der Geraden j.

d) (1) ▶ **Zeigen, dass Kante $\overline{BC}$ in jeder Ebenen der Schar E_a liegt** (8P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass sich an der Turmseite $BCFG$ eine Zugbrücke befindet, welche drehbar um die Kante $\overline{BC}$ ist. Deine Aufgabe ist es hier zu zeigen, dass die Kante $\overline{BC}$ in jeder Ebenen der Schar $E_a : a \cdot x - z = 6 \cdot a$ liegt.

Willst du zeigen, dass die Kante $\overline{BC}$ in jeder Ebenen der Schar E_a liegt, so setzt du die Koordinaten von Punkt B und Punkt C in die Ebenengleichung von E_a in Koordinatenform ein. Anschließend beweist du, dass Punkt B und C in den Ebenen E_a liegen und dass die resultierende wahre Aussagen unabhängig von Parameter a sind, was bedeutet, dass die Kante $\overline{BC}$ in jeder Ebenen der Schar E_a liegt.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

(2) ▶ **Untersuchen, ob die Zugbrücke in einer Ebene E_a liegt, wenn sie geschlossen ist**

Deine Aufgabe ist es nun zu überprüfen, ob die Zugbrücke in einer Ebenen E_a liegt, wenn diese vollständige geschlossen ist. Da sich die Zugbrücke um die Kante $\overline{BC}$ bewegt, liegt diese, wenn sie vollständig geschlossen ist, in der Ebenen $BCGF$. Das bedeutet, dass die äußeren Kanten der Zugbrücke entlang der Vektoren $\overrightarrow{BF}$ und $\overrightarrow{CG}$ verlaufen müssen (siehe Skizze Aufgabenteil a).

Willst du also überprüfen, ob die Zugbrücke im geschlossenen Zustand in einer Ebenen E_a liegt, so überprüfst du, ob die Punkte B, F, C und G in einer der Ebenen E_a liegen. Da du oben schon gezeigt hast, dass die Punkte B und C in allen Ebenen der Ebenenschar E_a liegen, musst du nun nur noch überprüfen, ob es einen Parameterwert für a gibt, sodass die Punkte F und G in einer gemeinsamen Ebenen der Schar E_a liegen.

(3) ▶ **Bestimmen des gesuchten Parameterwerts für a**

Im letzten Aufgabenteil dieser Aufgabe sollst du den Parameterwert für a der Ebene E_a bestimmen, in welcher die Zugbrücke liegt, wenn sie mit der Turmwand einen Winkel von $\alpha = 30°$ bildet. Die Turmwand wird durch die Seitenfläche $BCGF$ repräsentiert (siehe Skizze Aufgabenteil a), wobei Seitenfläche $BCGF$ als eine Ebene E_{BCGF} aufgefasst werden kann. a soll also so bestimmt werden, dass Ebene E_a mit der Ebenen E_{BCGF} einen Winkel von $30°$ einschließt.

Allgemein berechnest du den Schnittwinkel α zwischen zwei Ebenen über diesen Ansatz:
$\cos(\alpha) = \dfrac{\overrightarrow{n_1} \circ \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}$ mit:

- $\overrightarrow{n_1}$ und $\overrightarrow{n_2}$: Normalenvektoren der betrachteten Ebenen,
- α: Schnittwinkel.

Bestimme also im ersten Schritt die Normalenvektoren $\overrightarrow{n_{E_a}}$ und $\overrightarrow{n_{E_{BCGF}}}$ der Ebenen E_a und E_{BCGF}, um diese im zweiten Schritt in den oben aufgestellten Ansatz für den Schnittwinkel α einzusetzen. Hast du diese dort eingesetzt, so setzt du $\alpha = 30°$ in den Ansatz ein und löst die resultierende Gleichung nach Parameter a mit deinem CAS.

e) ▶ **Berechnen des Abstands der Person von der Seitenfläche $BCGF$** (4P)

An der Turmspitze S wird ein Windrichtungsmesser angebracht, dessen Spitze 0,7 m über S liegt, das heißt, die Spitze des Windrichtungsmesser besitzt diese Koordinaten:
$W(3\,|\,3\,|\,16,7)$.

Eine Person, deren Augenhöhe 1,50 m ist, steht auf dem Boden vor der Seitenfläche $BCGF$ des Turms und kann die Spitze W des Windrichtungsmesser gerade noch sehen. Deine Aufgabe ist es nun, den Abstand dieser Person von der Seitenfläche $BCGF$ zu berechnen.

Beim Lösen dieser Aufgabe gibt es zwei Möglichkeiten. Im folgenden werden beide vorgestellt:

1. Möglichkeit:

Ist die Spitze des Windrichtungsmesser bei $W(3\,|\,3\,|\,16,7)$ vom Boden aus vor der Seitenfläche $BCGF$ des Turmes gerade noch zu sehen, so verläuft der Blick der Person gerade so über die obere Kante $\overline{FG}$ der Seitenfläche $BCFG$. Das heißt, der Blick der Person verläuft auf einer Geraden h, welche durch Punkt W und durch einen beliebigen Punkt auf der Kante $\overline{FG}$ verläuft. Hier wird angenommen, dass Gerade h, durch die Mitte $M_{\overline{FG}}$ der Kante $\overline{FG}$ verläuft.

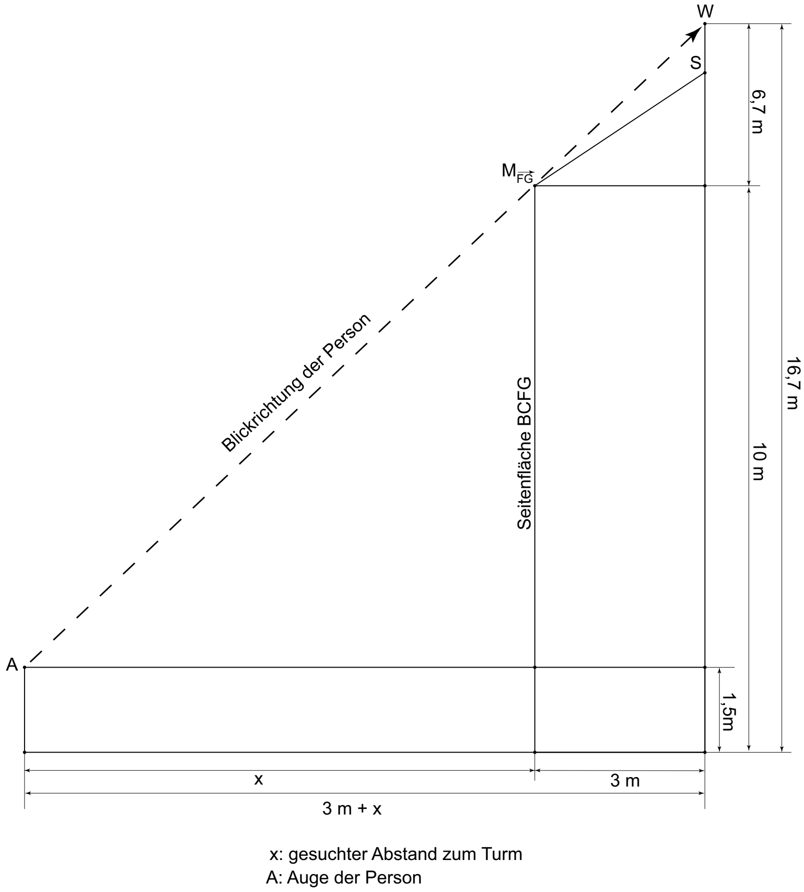
Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

Willst du berechnen, in welchem Abstand die Person vor der Seitenfläche $BCGF$ steht, so bestimmst du zuerst die Koordinaten der Position P der Person im Koordinatensystem. Dabei geht aus der Aufgabenstellung hervor, dass von einer Augenhöhe von 1,5 m der Person ausgegangen wird. Willst du also die Koordinaten der Position P der Person im Koordinatensystem bestimmen, so ermittelst du den Punkt auf der Geraden h der Blickrichtung welcher eine z - Koordinate von $z = 1,5$.

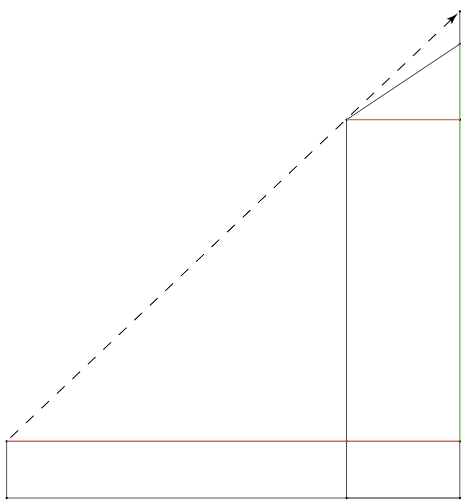
Hast du die Koordinaten von P ermittelt, so kannst du über die Differenz der x - Koordinaten den Abstand der Person zur Turmwand $BCGF$ berechnen.

2. Möglichkeit: Strahlensatz

Skizzierst du den gegebenen Sachverhalt in der Seitenansicht, so entsteht diese Skizze:



Wie du erkennen kannst, bildet die Seitenansicht des beschriebenen Sachverhalts eine Figur, in welcher ein Strahlensatz anwendbar ist. Zu bestimmen ist hier die Länge x, welche den Abstand der Person vom Turm repräsentiert.



Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.