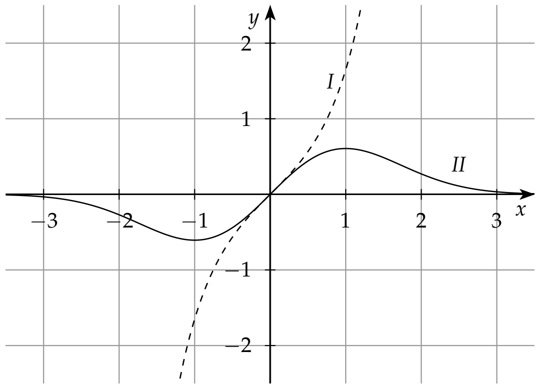
Gegeben sind die Funktionen $f$ und $g$ mit $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5 \cdot x^2}$ und $g(x) = x \cdot \mathrm{e}^{0{,}5 \cdot x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Ohne Nachweis kann im Folgenden benutzt werden: $f'(x) = (1 - x^2) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5 \cdot x^2}$.

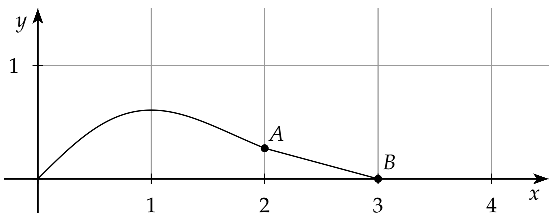
a) In der nebenstehenden Abbildung sind die Graphen zu $f$ und $g$ dargestellt. (15P)




Begründen Sie, dass der Graph II der Graph zur Funktion $f$ ist.
Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von $f$. Die Gerade zu $y = x$ ist die Tangente im Ursprung an den Graphen von $f$.
Geben Sie die Bedingungen für eine Tangente in einem Punkt an einen Graphen an.
Weisen Sie mithilfe dieser Bedingungen nach, dass die Graphen von $f$ und $g$ im Ursprung dieselbe Tangente haben.
Ermitteln Sie die Stellen, an denen sich die $y$- Werte von $f$ und $g$ um den Wert 2 unterscheiden.

b) Zeigen Sie, dass es genau zwei Extrempunkte des Graphen von $f$ gibt. (14P)
Begründen Sie, dass der Graph von $f$ genau drei Wendepunkte hat.
Bestimmen Sie alle Stellen von $f$, für die die Tangenten an den Graphen von $f$ die Steigung $-\frac{1}{4}$ besitzen.

c) Die Funktion $f$ wird als Modell zur Beschreibung der Wachstumsgeschwindigkeit der Höhe einer Pflanze in den ersten zwei Monaten verwendet; $x$ in Monaten, $f(x)$ in Metern pro Monat. (15P)




Bestimmen Sie den Höhenzuwachs im ersten Monat.
Nach zwei Monaten sinkt die Wachstumsgeschwindigkeit linear auf den Wert 0, der nach drei Monaten erreicht wird.
Berechnen Sie die Höhe der Pflanze nach drei Monaten, wenn sie zu Beginn der Beobachtung zwei Zentimeter hoch war.

Zeigen Sie, dass die Funktion $F$ mit $F(x) = c - \mathrm{e}^{-0{,}5 \cdot x^2}$ eine Stammfunktion von $f$ ist.
Beschreiben Sie, wie sich mithilfe der Funktion $F$ der Höhenzuwachs der Pflanze zwischen zwei Zeitpunkten $t_1$ und $t_2$ im Intervall $[0; 2]$ bestimmen lässt.

(44P)