a) ► **Wahrscheinlichkeiten berechnen** (11P)

Im Aufgabenteil a) werden Lampen der Firma F_1 betrachtet. Laut Aufgabentext liegt bei dieser Firma eine Ausschussquote von 9 % vor. Da die Lampen der laufenden Produktion entnommen werden, kannst du sagen: Jede der entnommen Lampen ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 9 % unbrauchbar. Da außerdem nur zwischen den beiden Merkmalsausprägungen „unbrauchbar" und „nicht unbrauchbar" unterschieden wird, kann die Anzahl der unbrauchbaren Lampen näherungsweise je durch eine binomialverteilte Zufallsgröße beschrieben werden.

Ereignis A

Der laufenden Produktion werden 20 Lampen entnommen. Sei X_1 die Zufallsgröße, welche die Anzahl der unbrauchbaren Lampen in dieser Stichprobe beschreibt. Überlege, wie X_1 verteilt ist. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 2 der Lampen unbrauchbar sind. Dies ist die Wahrscheinlichkeit $P(X_1 \geq 2)$.

Ereignis B

Nun werden der Produktion 10 Lampen entnommen. Die Anzahl der unbrauchbaren Lampen in der Stichprobe kann also durch eine Zufallsgröße X_2. Überlege wieder, wie diese Zufallsgröße verteilt ist. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr brauchbare als unbrauchbare Lampen in der Stichprobe enthalten sind. Dies ist der Fall, wenn **weniger als 5** unbrauchbare Lampen bzw. **mehr als 5** brauchbare Lampen gefunden werden. Gesucht ist also die Wahrscheinlichkeit $P(X_2 < 5) = P(X_2 \leq 4)$:

Ereignis C

Zuletzt werden der Produktion 1.100 Lampen entnommen, allerdings wird dieses Mal die Anzahl der funktionstüchtigen Lampen betrachtet. Da 9 % unbrauchbar sind, sind 91 % der Lampen funktionstüchtig. Die Anzahl der funktionstüchtigen Lampen in der Stichprobe kann also durch eine Zufallsgröße X_3 beschrieben werden. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass **mindestens** 971 und **höchstens** 998 funktionstüchtige Lampen gefunden werden. Dies ist die Wahrscheinlichkeit $P(971 \leq X_3 \leq 998)$.

b) (1) ► **Wahrscheinlichkeit für die Annahme des Kartons berechnen** (7P)

Es ist bekannt, dass sich im Karton 30 Lampen der Firma F_2 befinden und dass genau 6 dieser Lampen defekt sind. Der Händler entnimmt dem Karton zwei Lampen ohne Zurücklegen. Wenn beide funktionstüchtig sind, dann nimmt er den Karton an.
Die Frage ist also: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler dem Karton zwei funktionstüchtige Lampen entnimmt?

Zu Beginn befinden sich 30 Lampen im Karton, von denen 6 defekt sind. Wenn die erste entnommen ist, dann befinden sich noch 29 Lampen im Karton. Du kannst die Situation in einem Baumdiagramm darstellen. Sei hier D das Ereignis „Eine Lampe ist defekt" und F das zugehörige Gegenereignis „Eine Lampe ist funktionstüchtig."

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei funktionstüchtige Lampen entnommen werden. Dieses Ereignis ist durch den Pfad $F - F$ dargestellt. Mit der Pfadregel folgt die zugehörige Wahrscheinlichkeit.

(2) ► **Höchstanzahl der defekten Lampen berechnen**

Im ersten Teil dieser Aufgabe waren **sechs der 30** Lampen im Karton defekt. Nun ist die Anzahl der defekten Lampen unbekannt; du kannst also sagen, es gibt $\boldsymbol{x}$ **von 30** defekten Lampen.

Wieder werden dem Karton 2 Lampen entnommen und wieder wird der Karton angenommen, wenn beide funktionstüchtig sind. Gefragt ist, wie groß die Anzahl x der defekten Lampen maximal werden darf, damit der Karton noch mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,5 angenommen wird.

Du kannst so vorgehen:

- Betrachte dein Baumdiagramm aus dem ersten Teil der Aufgabe und modifiziere es derart, dass es auf die neue Situation passt.
- Berechne in Abhängigkeit von x die Wahrscheinlichkeit dafür, zwei funktionstüchtige Lampen zu ziehen. Diese Wahrscheinlichkeit muss mindestens 0,5 betragen. Löse so nach x auf.

c) ► **Wahrscheinlichkeitsverteilung vervollständigen** (8P)

Betrachte die möglichen Ereignisse in der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Überlege in einem ersten Schritt, welche Situationen bei den beiden Ereignissen vorliegen, d.h. welche Lampe verkauft wurde und ob sie funktionstüchtig bzw. defekt war. Berechne sodann die zugehörige Wahrscheinlichkeit.

Beachte dabei: Bei einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ergeben die Wahrscheinlichkeiten in der Summe den Wert 1. Es genügt also, wenn du drei der vier Wahrscheinlichkeiten ausführlich berechnest.

Beispiel: $\boldsymbol{P(G=-1,02)}$ berechnen

Wir beginnen mit dem Ereignis $G=-1,02$. Es tritt ein, wenn eine von F_2 hergestellte Lampe verkauft wird, die Lampe aber defekt ist und der Verkaufspreis zurückerstattet werden muss. Die Wahrscheinlichkeit $P(G=-1,02)$ entspricht also der Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- die Lampe von der Firma F_2 stammt

und

- defekt ist.

Aus dem Aufgabentext weißt du, dass 65 % der Lampen von der Firma F_2 geliefert werden. Also stammt jede Lampe mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,65 von der Firma F_2.

Darüber hinaus weißt du, dass die Ausschussquote der Firma F_2 bei 7 % liegt. Nach der Pfadregel folgt damit für unsere gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Auf diese Weise kannst du alle Einträge der Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnen.

► **Erwartungswert berechnen**

Du hast nun die vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung ermittelt. Den Erwartungswert kannst du nun so berechnen:

Seien g_i die die möglichen Werte von G und $P(G=g_i)$ die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten, jeweils für $i=1,...,4$. Für den Erwartungswert $E(G)$ gilt dann:

$E(G) = \sum_{i=1}^{4}(g_i \cdot P(G = g_i))$.

In Worten kannst du sagen: Multipliziere jeden möglichen Wert von G mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit und addiere diese Ergebnisse.

d) **▶ Fehler auf stochastische Unabhängigkeit untersuchen** (4P)

Wir definieren zunächst einige Ereignisse:

- Sei L das Ereignis „Eine Lampe hat einen Fehler im Leuchtsystem“,
- sei S das Ereignis „Eine Lampe hat einen Fehler im Schraubmechanismus“,
- seien $\overline{L}$ und $\overline{S}$ die zugehörigen Gegenereignisse.

Das Ereignis: „Es tritt mindestens einer der beiden Fehler auf“ kannst du dann darstellen als $L \cup S$; das Ereignis „Es treten beide Fehler gleichzeitig auf“ entspricht dann $L \cap S$.

Aus der Aufgabenstellung kennst du die Werte:

- $P(S) = 0,02$
- $P(L \cap S) = 0,001$
- $P(L \cup S) = 0,069$

Du sollst nun untersuchen, ob die Fehler unabhängig voneinander auftreten. Dies ist der Fall, wenn die Ereignisse L und S stochastisch unabhängig sind. Die beiden Ereignisse sind stochastisch unabhängig, wenn gilt:

$P(L \cap S) = P(L) \cdot P(S)$.

Du kannst so vorgehen:

- Über eine Vierfeldertafel oder über den Additionssatz kannst du die Wahrscheinlichkeit $P(L)$ berechnen.
- Setze dann $P(L \cap S)$, $P(L)$ und $P(S)$ in die obige Gleichung ein und untersuche, ob sie erfüllt ist.