Aufgabe 1 (5VP)

a) **► Schaubild von f begründen**

Betrachte die **Nullstelle** von f:

$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; a \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-x} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$

Da $a \neq 0$ und $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$ für alle Werte von x, besitzt f nur **eine einfache** Nullstelle bei $x = 0$. Das Schaubild von f muss die x-Achse deshalb im Ursprung **schneiden**.

Diese Bedingung wird nur von Abbildung 1 erfüllt. Abbildung 3 zeigt eine **Berührnullstelle** im Ursprung.

► Parameterwert für a bestimmen

Aus Abbildung 1 geht hervor, dass das Schaubild von f durch den Punkt $(-1 \mid \mathrm{e})$ verläuft. Setze die Koordinaten dieses Punktes in die Funktionsgleichung von f ein und löse nach a auf:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e} &= a \cdot (-1) \cdot \mathrm{e}^{-(-1)} && \\
\mathrm{e} &= -a \cdot \mathrm{e}^{1} && |:\mathrm{e} \\
1 &= -a && |\cdot(-1) \\
a &= -1 &&
\end{aligned}$$

b) **► Schaubilder den Funktionen zuordnen**

Finde Eigenschaften der Schaubilder von f' und der Integralfunktion durch **grafisches** Differenzieren und Integrieren.

1. Schritt: Schaubild der Ableitungsfunktion

Das Schaubild der Funktion f ist für $x < 1$ monoton fallend und besitzt bei $x = 1$ einen Tiefpunkt. Für $x > 1$ ist das Schaubild monoton steigend.

Das Schaubild der Ableitungsfunktion f' muss also für $x < 1$ **unterhalb** der x-Achse verlaufen, muss die x-Achse bei $x = 1$ **schneiden** und für $x > 1$ **oberhalb** der x-Achse verlaufen.

Diese Eigenschaften findest du in Abbildung 4 wieder.

2. Schritt: Schaubild der Integralfunktion

Die Integralfunktion I ist eine **Stammfunktion** von f:

$$I(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}x = [F(t)]_0^x = F(x) - \underbrace{F(t)}_{=:C}.$$

Das Schaubild von f besitzt an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$. Also muss das Schaubild von I an dieser Stelle einen **Hochpunkt** besitzen. Diese Eigenschaft findest du in Abbildung 3 wieder.

Aufgabe 2 (5VP)

a) **► Aussagen beurteilen**

F besitzt

- Wendestellen, wo f Extremstellen besitzt
- Extremstellen, wo f Nullstellen besitzt

Deshalb besitzt F im Intervall $-3 < x < 3$ **fünf** Extremstellen bei $x_{1,2} = \pm 2{,}5$, $x_{3,4} = \pm 0{,}5$ und $x_5 = 0$ und **vier** Wendestellen bei $x_{1,2} \approx \pm 2$ und $x_{3,4} \approx 0{,}25$.

f ist die erste Ableitung von F und liefert Informationen über den **Verlauf** und das **Steigungsverhalten** von F. Über die genaue Lage des Schaubildes von F im Koordinatensystem sagt f jedoch **nichts** aus. Deshalb kann keine Aussage zur Anzahl und Lage der Nullstellen von F gemacht werden.

b) ► **Wert des Integrals begründen**

Wende zunächst den Hauptsatz der Integralrechnung an:

$$\begin{aligned}\int_{0,5}^{2,5} f'(x)\,\mathrm{d}x &= [f(x)]_{0,5}^{2,5}\\ &= f(2{,}5) - f(0{,}5)\end{aligned}$$

In der Aufgabenstellung ist das Schaubild von f gegeben. Lies die Funktionswerte $f(0{,}5)$ und $f(2{,}5)$ näherungsweise ab:

$f(0{,}5) = 0$ und $f(2{,}5) = 0$.

Damit folgt:

$$\int_{0,5}^{2,5} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(2{,}5) - f(0{,}5) = 0 - 0 = 0.$$

Aufgabe 3 (4VP)

a) ► **Aufgabe formulieren**

Gegeben war eine Funktion f. Den Funktionsterm von f kannst du der dritten Zeile der Lösung entnehmen:

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$.

Aufgabe war es, die Koordinaten des Wendepunktes des Schaubildes von f zu berechnen und eine Gleichung der Wendetangente zu bestimmen.

b) ► **Aufgabe lösen**

Bestimme die Gleichung der Wendetangente. Als Ansatz ist mit $t : y = mx + b$ die allgemeine Geradengleichung gegeben. m ist die Steigung der Geraden. Da t die Tangente an das Schaubild von f im Punkt W ist, hat sie die gleiche Steigung wie die Funktion f in diesem Punkt. Also ist $m = f'(-\frac{2}{3})$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 + 4x\\ f'(-\tfrac{2}{3}) &= 3 \cdot \left(-\tfrac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\tfrac{2}{3}\right)\\ &= \cancel{3} \cdot \frac{4}{\cancel{9}} - \frac{8}{3}\\ &= \frac{4}{3} - \frac{8}{3}\\ f'(-\tfrac{2}{3}) &= -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

Setze jetzt die m und die Koordinaten von W in die allgemeine Tangentengleichung ein und löse nach b auf:

$$-\frac{11}{27} = \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + b$$
$$-\frac{11}{27} = \frac{8}{9} + b \qquad \mid -\frac{8}{9}$$
$$-\frac{11}{27} - \frac{8}{9} = b$$
$$-\frac{11}{27} - \frac{24}{27} = b$$
$$-\frac{35}{27} = b$$

Es folgt die Gleichung $t: y = -\frac{4}{3}x - \frac{35}{27}$.