a) **► Einzeichnen von P und Q in die Grafik** (11P)

Berechne zunächst die **Koordinaten** des Punktes P. Anschließend kannst du die Punkte P und Q in das Koordinatensystem **einzeichnen**.

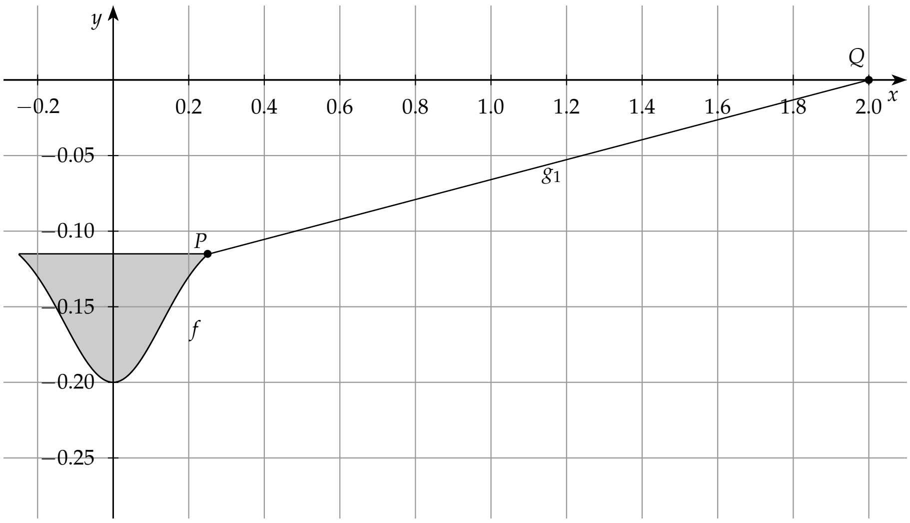
Der Punkt P ist folgendermaßen in der Aufgabenstellung angegeben: $P(0,25|f(0,25))$

Damit dieser in die Grafik eingezeichnet werden kann, musst du zuerst die vollständigen Koordinaten berechnen. Dafür kannst du die x-Koordinate des Punktes in die Funktionsgleichung von f **einsetzen**.

$$\begin{aligned} f(x) &= -\tfrac{1}{10}(1+\mathrm{e}^{-30\cdot x^2}) \qquad | \; x = 0,25 \\ f(0,25) &= -\tfrac{1}{10}(1+\mathrm{e}^{-30\cdot 0,25^2}) \\ f(0,25) &\approx -0,115 \end{aligned}$$

Die **Koordinaten des Punktes** P sind: $P(0,25|-0,115)$

Jetzt kannst du die Punkte P und Q in die Grafik einzeichnen:



► Höhenunterschied berechnen

Um den Höhenunterschied zwischen Straßenmitte und Straßenrand zu berechnen, musst du zunächst die **Koordinaten** des Punktes, in dem die Straßenmitte liegt, berechnen. Die Koordinaten des Straßenrandes kennst du bereits. Der Höhenunterschied ergibt sich dann aus der **Differenz** der y-Koordinaten der beiden Punkte.

Schau dir nochmals die Grafik an. Du kannst erkennen, dass die Straßenmitte, also der Tiefpunkt des Graphen, an der Stelle $x = 0$ liegt. Der Tiefpunkt entspricht hier dem Schnittpunkt des Graphen von f mit der y-Achse. Setze für x den Wert 0 in die Funktionsgleichung ein, um den dazugehörigen y−Wert zu ermitteln:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\tfrac{1}{10}(1+\mathrm{e}^{-30\cdot x^2}) \qquad | \; x = 0 \\ f(0) &= -\tfrac{1}{10}(1+\mathrm{e}^{-30\cdot 0^2}) \\ &= -\tfrac{1}{10}(1+\mathrm{e}^{0}) \\ &= -\tfrac{1}{10}(1+1) \\ &= -0,2 \end{aligned}$$

Der Punkt, in dem die **Straßenmitte** liegt, hat die Koordinaten $M(0|-0,2)$.

Der rechte Straßerand liegt im Punkt $Q(2,0|0)$. Jetzt kannst du die **Differenz** der beiden $y-$Werte bilden, um den Höhenunterschied zu ermitteln:

$$\begin{aligned}\text{Höhenunterschied} &= y_Q - y_P \qquad | \; y_Q = 0;\; y_P = -0,2\\ &= 0-(-0,2)\\ &= 0,2\end{aligned}$$

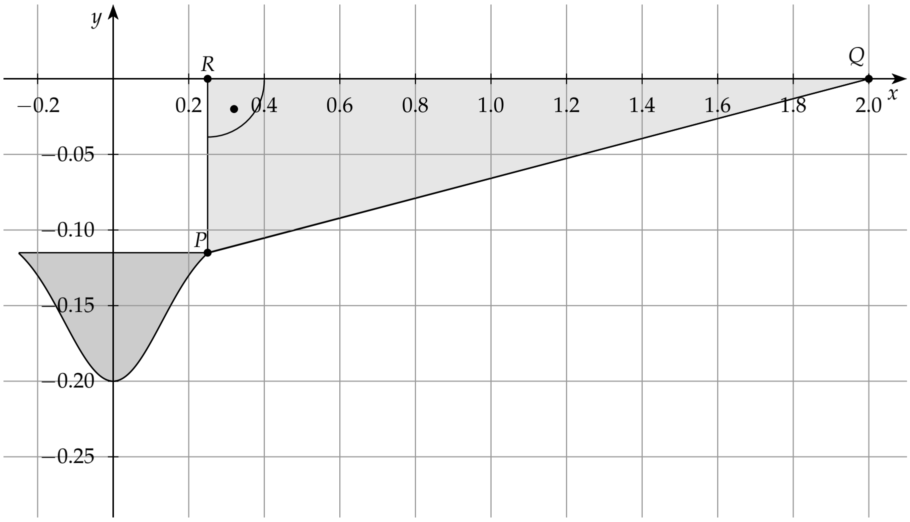
Der Höhenunterschied zwischen Straßenmitte und Straßenrand beträgt also 0,2 Einheiten in deinem Koordinatensystem. Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass x und $f(x)$ in Metern angegeben werden. 0,2 Einheiten entsprechen 0,2 m oder 20 cm.

Der Höhenunterschied zwischen Straßenmitte und Straßenrand beträgt 0,2 m oder 20 cm.

▶ Berechnung der Fahrbahnbreite

Um die Fahrbahnbreite, also die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ zu berechnen, kannst du den **Satz des Pythagoras** mit der Formel $c^2 = a^2 + b^2$ anwenden. c ist die Länge der Hypotenuse, a und b sind die Längen der beiden Katheten des Dreiecks.

Zeichne zunächst das Dreieck in das Koordinatensystem ein:



Du kannst erkennen, dass die Hypotenuse des Dreiecks gerade der Strecke $\overline{PQ}$ entspricht. Die beiden Katheten sind die Strecken $\overline{PR}$ und $\overline{RQ}$.

Die Längen der beiden Katheten lassen sich sehr schnell berechnen:

$\overline{PR} = y_R - y_P$

$\overline{PR} = |0-(-0,115)|$

$\overline{PR} = |0,115|$

Die Strecke $\overline{PR}$ ist 0,115 m lang.

$\overline{RQ} = |x_Q - x_R|$

$\overline{RQ} = |x_Q - x_P|$

$\overline{RQ} = |2-0,25|$

$\overline{RQ} = |1,75|$

Die Strecke $\overline{RQ}$ ist 1,75 m lang.

Jetzt kennst du die Längen der beiden Katheten und kannst mit dem Satz des Pythagoras die Länge der Hypotenuse, also der Strecke $\overline{PQ}$, berechnen:

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= \overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2 && \mid \overline{PR} = 0,115\,\text{m};\ \overline{RQ} = 1,75\,\text{m} \\ \overline{PQ}^2 &= (0,115\,\text{m})^2 + (1,75\,\text{m})^2 \\ \overline{PQ}^2 &= 3,076\,\text{m}^2 \\ \overline{PQ} &\approx 1,75\,\text{m} \end{aligned}$$

Die Fahrbahn ist etwa 1,75 m breit.

▶ Zeigen der Achsensymmetrie

Um zu zeigen, dass der Graph einer Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist, musst du zeigen, dass $f(-x) = f(x)$ für alle x des Definitionsbereichs gilt.

Setze $-x$ in den Funktionsterm von f ein und zeige, dass $f(-x) = f(x)$ ist:

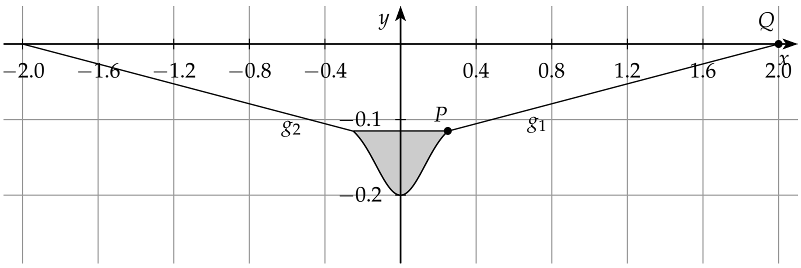
$$\begin{aligned} f(-x) &= -\frac{1}{10}(1 + e^{-30\cdot(-x)^2}) \\ &= -\frac{1}{10}(1 + e^{-30\cdot x^2}) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Da $f(-x) = f(x)$ gilt, ist der Graph der Funktion f achsensymmetrisch zur y-Achse.

▶ Gleichung g_2 aufstellen

Die **allgemeine Geradengleichung** lautet $y = m \cdot x + c$, wobei m die Steigung und c der $y-$Achsenabschnitt ist. Ermittle m und c und setze sie in die allgemeine Geradengleichung ein.

Bevor du damit beginnst, m und c zu ermitteln, kannst du zunächst eine kurze **Skizze** erstellen, damit der Sachverhalt klarer wird:



Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass der gesamte Querschnitt der Straße, also die gesamte Grafik, **achsensymmetrisch** zur $y-$Achse ist. Daher kannst du die Geradengleichung der Geraden g_2 ermitteln, indem du die Gerade g_1 an der $y-$Achse **spiegelst:**

- Der $y-$Achsenabschnitt, also der $y-$Wert in dem die Gerade die $y-$Achse schneidet, bleibt bei einer Spiegelung an der $y-$Achse gleich. Er lautet daher: $c = -0,1318$
- Betragsmäßig bleibt die Steigung bei einer Spiegelung an der $y-$Achse gleich. Die Steigung der Geraden g_2 muss lediglich negativ sein. Die Spieglung entspricht einer Vorzeichenumkehr bei der Steigung: $m = -0,0659$

Setze jetzt die Werte für m und c in die allgemeine Geradengleichung ein:

$$\begin{aligned} g_2(x) &= m \cdot x + c && \mid m = -0,0659;\ c = -0,1318 \\ g_2(x) &= -0,0659 \cdot x + (-0,1318) \\ g_2(x) &= -0,0659 \cdot x - 0,1318 \end{aligned}$$

Die Geradengleichung der Geraden g_2 lautet $g_2(x) = -0,0659 \cdot x - 0,1318$.

b) ▶ **Inhalt der Fläche berechnen** (12P)

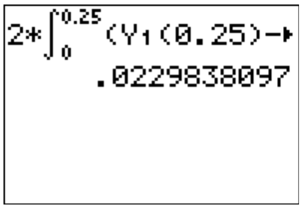
Der Flächeninhalt der markierten Fläche ist der Flächeninhalt **zwischen** der **Geraden** $y = f(0,25)$ und dem **Graphen der Funktion** f. Die untere Grenze des Integrals wäre hier $x_u = -0,25$, die obere Grenze wäre $x_o = 0,25$. Wenn du dir die Skizze nochmals anschaust, dann wirst du erkennen, dass die Fläche **achsensymmetrisch** zur $y-$Achse ist. Daher kannst du einfach den Flächeninhalt rechts von der $y-$Achse, also in den Grenzen $x_u = 0$ und $x_o = 0,25$, berechnen und ihn mit Zwei multiplizieren:

$$A = \int_{-0,25}^{0,25} (f(0,25) - f(x))\mathrm{d}x$$

$$A = 2 \cdot \int_{0}^{0,25} (f(0,25) - f(x))\mathrm{d}x$$

Bei dieser Rechnung ist dir dein **GTR** behilflich:

Trage den Funktionsterm von f in das `Y=`-Menü deines GTR ein. Verlasse das `Y=`-Menü danach mit `2nd → QUIT`. Tippe jetzt das oben stehende Integral ein. Den Befehl für ein Integral findest du unter `MATH → fnInt(`. Du musst nur statt dem f immer Y_1 eintippen, da du unter diesem Platzhalter den Funktionsterm von f abgespeichert hast. Das Y_1 findest du unter `VARS → Y-VARS → FUNCTION`

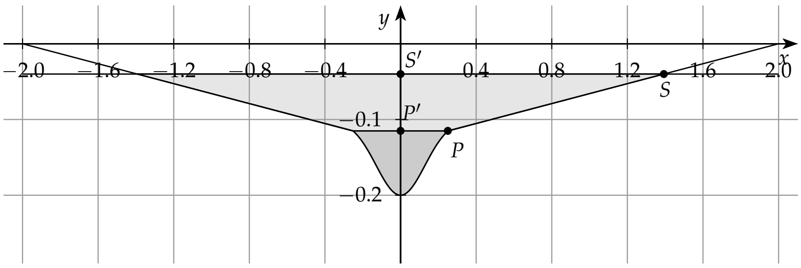


Der Flächeninhalt der Rinne beträgt etwa $0,023\,\mathrm{m}^2$.

▶ **Inhalt der Fläche bei Starkregen**

Berechne, bis zu welchem $y-$Wert das Wasser ansteigt. Anschließend musst du dir überlegen, um welche **Fläche** es sich genau handelt. Wenn du das geklärt hast, kannst du deren Flächeninhalt berechnen.

Das Wasser steigt auf eine Höhe von 0,16 m über dem Grund an. Der Grund liegt bei einem $y-$Wert von $y_G = -0,2$. Daher steigt das Wasser bis zu einem $y-$Wert von $y_W = -0,2 + 0,16 = -0,04$ an. Um einen besseren Überblick zu erhalten, kannst du den Sachverhalt zunächst einmal **skizzieren**:



Du erkennst die Gerade $y = -0,04$ und den Querschnitt der Straße. Der Flächeninhalt des Wassers bei Starkregen setzt sich zusammen aus dem bereits berechneten Flächeninhalt der **Rinne** und dem Flächeninhalt der beiden **Trapeze**. Die Trapeze sind **achsensymmetrisch** zur $y-$Achse. Daher reicht es, den Flächeninhalt eines Trapezes zu berechnen und ihn anschließend mit 2 zu multiplizieren.

Den **Flächeninhalt eines Trapezes** kannst du mit der Formel $A_T = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h$ berechnen. a und c sind die beiden parallelen Seiten, h ist die Höhe des Trapezes. In unserem Fall ist die Seite a die Strecke $\overline{P'P}$ und die Seite c die Strecke $\overline{S'S}$. Die Höhe h entspricht der Strecke $\overline{P'S'}$.

Stelle nun die Formel neu auf:

$A_T = \frac{1}{2}(a+c)\cdot h$

$A_T = \frac{1}{2}(\overline{P'P}+\overline{S'S})\cdot\overline{P'S'}$

Jetzt musst du die entsprechenden Werte einsetzen. Dafür benötigst du die Koordinaten der Punkte:

- $P(0,25|-0,115)$: s. Aufgabenteil a)
- $P'(0|-0,115)$: gleiche $y-$Koordinate wie P'; liegt auf der $y-$Achse $\Rightarrow\ x=0$
- $S(x_S|-0,04)$: s. oben
- $S'(0|-0,04)$: gleiche $y-$Koordinate wie S'; liegt auf der $y-$Achse $\Rightarrow\ x=0$

Dir fehlt die $x-$Koordinate des Punkts S. Diese kannst du berechnen, indem du die Gerade g_1 mit der Gerade $y=-0,04$ gleichsetzt:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= -0,04 \\ 0,0659x-0,1318 &= -0,04 \qquad |\ +0,1318 \\ 0,0659x &= 0,0918 \qquad |:0,0659 \\ x &\approx 1,393 \end{aligned}$$

Die Koordinaten des Punktes S sind $S(1,393|-0,04)$.

Jetzt kannst du den **Flächeninhalt des Trapezes** berechnen:

$A_T = \frac{1}{2}(\overline{P'P}+\overline{S'S})\cdot\overline{P'S}'$

$A_T = \frac{1}{2}((|0-0,25|)+(|0-1,39|))\cdot|(-0,04-(-0,115))|$

$A_T = \frac{1}{2}(0,25+1,39)\cdot 0,075$

$A_T = 0,0615$

Der **gesamte Flächeninhalt** setzt sich jetzt zusammen aus dem Flächeninhalt der Rinne und zweimal dem Flächeninhalt des Trapezes:

$A = A_R + 2\cdot A_T$

$A = 0,023+2\cdot 0,0615$

$A = 0,146$

Der Flächeninhalt des Querschnitts bei Starkregen beträgt etwa $0,146\,\mathrm{m}^2$.

c) ▶ **Ableitung von f** (12P)

Bevor du die Ableitung der Funktion f bildest, solltest du den Funktionsterm zunächst **ausmultiplizieren**. Anschließend kannst du die Ableitung mit Hilfe der **Kettenregel** bilden.

$f(x) = -\frac{1}{10}\cdot(1+\mathrm{e}^{-30x^2})$

$f'(x) = -\frac{1}{10}\cdot(0+\mathrm{e}^{-30x^2}\cdot(-60x))$

$f'(x) = 0+\frac{60x}{10}\cdot\mathrm{e}^{-30x^2}$

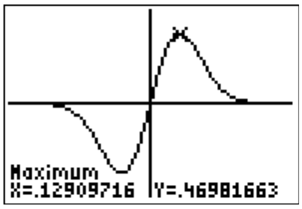
$f'(x) = 6x\cdot\mathrm{e}^{-30x^2}$

▶ **Bestimmung der maximalen Steigung**

Die maximale Steigung der Funktion f befindet sich an der Stelle, an der die **Ableitung** von f, also die Funktion f' ein **Maximum** hat.

1. Möglichkeit: GTR

Du kannst die maximale Steigung mit deinem GTR berechnen: Gib die Funktion f' in das `Y=`-Menü deines GTR ein und lasse sie mit dem Befehl `GRAPH` zeichnen. Anschließend kannst du über `2nd → CALC → 4:maximum` das Maximum bestimmen. Die y-Koordinate gibt dir die Steigung des Graphen von f an.



Die maximale Steigung beträgt 0,47.

Alternative: Rechnung von Hand

Um das Maximum der Funktion f' zu bestimmen, musst du f' ableiten und die dadurch entstehende Funktion f'' gleich Null setzen (**notwendige Bedingung**). Beim Ableiten musst du die **Produkt- und die Kettenregel** anwenden:

$$f''(x) = 6 \cdot e^{(-30x^2)} + 6x \cdot e^{(-30x^2)} \cdot (-60x)$$
$$f''(x) = 6 \cdot e^{(-30x^2)} - 360x^2 \cdot e^{(-30x^2)}$$
$$f''(x) = e^{(-30x^2)}(6 - 360x^2)$$

Setze jetzt $f''(x)$ gleich Null, um mögliche Extremstellen zu berechnen:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 & & \\ e^{(-30x^2)}(6-360x^2) &= 0 & &\mid e^{(-30x^2)} = 0 \text{ oder } (6-360x^2) = 0 \\ 6 - 360x^2 &= 0 & &\mid +360x^2 \\ 6 &= 360x^2 & &\mid :360 \\ \tfrac{1}{60} &= x^2 & &\mid \sqrt{} \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{\tfrac{1}{60}} & & \\ x_{1,2} &\approx \pm 0,129 & & \end{aligned}$$

Jetzt musst du noch überprüfen, an welcher Stelle sich ein **Maximum** befindet. Dafür bildest du die dritte Ableitung f''' und setzt die eben berechneten Werte in f''' ein (**hinreichende Bedingung**). Beim Ableiten musst du wieder die Produktregel und die Kettenregel anwenden:

$$f'''(x) = e^{(-30x^2)} \cdot (-60x) \cdot (6 - 360x^2) + e^{(-30x^2)} \cdot (0 - 720x)$$
$$f'''(x) = e^{(-30x^2)} \cdot (-360x + 21.600x^3) + e^{(-30x^2)} \cdot (-720x)$$
$$f'''(x) = e^{(-30x^2)} \cdot (-360x + 21.600x^3 - 720x)$$
$$f'''(x) = e^{(-30x^2)} \cdot (21.600x^3 - 1.080x)$$

Setze jetzt x_1 und x_2 in f''' ein und berechne die dazugehörigen Funktionswerte:

$$\begin{aligned} f'''(x) &= e^{(-30x^2)} \cdot (21.600x^3 - 1.080x) \\ f'''(x_1) &= e^{(-30\cdot 0,129^2)} \cdot (21.600 \cdot 0,129^3 - 1.080 \cdot 0,129) \\ f'''(x_1) &\approx -56,4 \end{aligned}$$

Da $f'''(x_1) < 0$ ist, ist das Extremum an der Stelle $x_1 = 0,129$ ein Maximum. Die maximale Steigung befindet sich also an der Stelle $x_1 = 0,129$. Setze diesen Wert jetzt in die Funktion f' ein, um den dazugehörigen $y-$Wert zu ermitteln:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x \cdot e^{-30x^2} \\ f'(0,129) &= 6 \cdot 0,129 \cdot e^{-30\cdot 0,129^2} \\ f'(0,129) &\approx 0,47 \end{aligned}$$

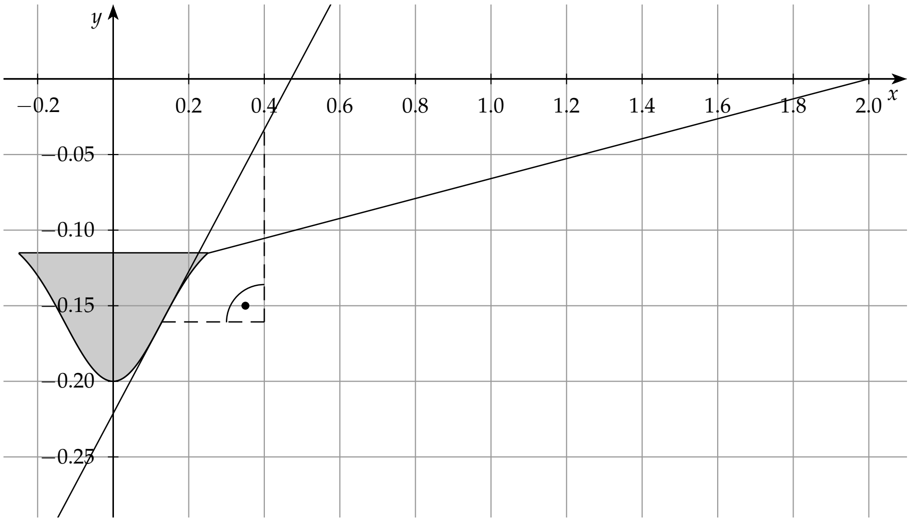
Die maximale Steigung beträgt 0,47.

▶ Untersuchen, ob die Vorschrift eingehalten ist

Du kannst den Steigungswinkel mit Hilfe des Tangens berechnen.

Oben hast du bereits berechnet, an welcher Stelle die **Steigung maximal** ist. Außerdem hast du die Steigung an dieser Stelle berechnet. Wenn der Steigungswinkel an dieser Stelle nicht größer als 26° ist, dann ist die Steigung nirgendwo größer als 26°. Berechne also den Steigungswinkel der Funktion f an der Stelle $x_1 = 0,129$.

Um den Steigungswinkel an der Stelle $x_1 = 0,129$ zu berechnen, kannst du dir eine Skizze erstellen:



Wie du erkennen kannst, musst du den Steigungswinkel der Tangente der Funktion f an der Stelle $x_1 = 0,129$ gegenüber der Horizontalen berechnen. Das geht mit dem Tangens:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= m \qquad | \; m = \text{Steigung} = 0,47 \\ \tan(\alpha) &= 0,47 \\ \alpha &= \tan^{-1}(0,47) \\ \alpha &\approx 25,17^\circ \end{aligned}$$

Der Steigungswinkel an der **steilsten Stelle** beträgt 25,17°. Daher ist der Winkel zur Horizontalen an keiner Stelle des Rinnenquerschnitts größer als 26°, die Vorschrift wurde eingehalten.

d) ► **Nachweis des Knicks in der Straße** (11P)

Wenn die Fahrbahn keinen Knick haben würde, dann müsste die Steigung der Geraden g_1 der Steigung der Funktion f im Punkt $P(0,25|-0,115)$ entsprechen. Berechne daher die **Steigung** von f im Punkt $P(0,25|-0,115)$.

Die Steigung kannst du mit Hilfe der Ableitung berechnen. Bilde die **Ableitung** der Funktion an der Stelle $x = 0,25$. Die erste Ableitung der Funktion steht im Aufgabenteil c):

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x \cdot e^{-30x^2} \qquad | \; x = 0,25 \\ f'(0,25) &= 6 \cdot 0,25 \cdot e^{-30 \cdot 0,25^2} \\ f'(0,25) &\approx 0,23 \end{aligned}$$

Die **Steigung** der Funktion f an der Stelle $x = 0,25$ beträgt etwa 0,23.

Die Gerade g_1 hat die Steigung $0,0659$. Da die Steigung der Geraden g_1 nicht gleich der Steigung der Funktion an der Stelle $x = 0,25$ ist, hat die Straße einen Knick.

► **Aufstellen einer Tangentengleichung**

Mach dir zunächst klar, welche **Angaben** gegeben sind. Anschließend kannst du die **allgemeine Tangentengleichung** notieren und die Elemente dieser bestimmen. Da nur die **Vorgehensweise** beschrieben werden soll, musst du die Rechnung selbst nicht durchführen.

Hier sollst die **Gleichung** einer Tangenten an den Graphen von f bilden, die durch den **Punkt** $Q(2|0)$ geht. Die Tangente hat die Steigung $f'(a)$, wobei a die Stelle ist, an der die Tangente an den Graphen von f angelegt wird. Die **allgemeine Tangentengleichung** lautet $t(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$. Diese Tangente soll durch den Punkt $Q(2|0)$ gehen. Das erreichst du, indem du für x den Wert 2 und für $t(x)$ den Wert 0 einsetzt. So könntest du auch die Stelle a ermitteln. Das ist hier aber nicht verlangt.

Die **Vorgehensweise** ist also folgende:

- Bilde die erste Ableitung von f und setze die gesuchte Stelle a in diese ein.
- Setze $x = a$ in den Funktionsterm $f(x)$ ein.
- Setze $f(a)$, $f'(a)$ und a in die allgemeine Tangentengleichung ein.
- Setze $x = 2$ in die allgemeine Tangentengleichung ein.
- Setze die entstandene Tangentengleichung gleich Null und löse sie nach a auf.
- Jetzt kannst du die tatsächlichen Zahlenwerte, $f(a)$ und $f'(a)$, ermitteln, indem du a in f bzw. f' einsetzt.
- Setze die Werte a, $f(a)$ und $f'(a)$ in die allgemeine Tangentengleichung ein.