a) **► Koordinatengleichung von E angeben** (7P)

Die Koordinatengleichung baut sich allgemein in der Form

$E : n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = p$

auf. Dabei bezeichnen n_1, n_2 und n_3 die Einträge des Normalenvektors. Du benötigst folglich zunächst den Normalenvektor und die Normalenform der Ebene, um auf die Koordinatengleichung zu schließen.
Den Normalenvektor erhältst du durch das Vektorprodukt der Richtungsvektoren, das du mit deinem Rechner bestimmen kannst.
Die Normalenform baut sich nach der folgenden Form auf.

$E : \left(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{p}\right) \cdot \overrightarrow{n}$

Folglich benötigst du den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ deiner Ebene. Dieser steht senkrecht zu den Richtungsvektoren und kann durch das Kreuzprodukt selbiger gebildet werden.

► Achsenschnittpunkte bestimmen

Die Achsenschnittpunkte werden auch Spurpunkte genannt.
Um den Achsenschnittpunkt mit einer bestimmten Achse zu bestimmen, z.B. z-Achse, musst du alle anderen Koordinaten in der Koordinatengleichung gleich Null setzen, im Beispiel also x und y.
Dies ist darin begründet, dass die Spurpunkte X, Y und Z die Koordinaten $X(x \mid 0 \mid 0)$, $Y(0 \mid y \mid 0)$ und $Z(0 \mid 0 \mid z)$ haben.

Löse dann die Gleichung so auf, dass du einen Wert für deine Koordinate erhältst.

► Schnittwinkel berechnen

Den Schnittwinkel zweier Ebenen erhältst du über die Formel:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{|\overrightarrow{n_1} \circ \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}\right)$$

Dabei sind $\overrightarrow{n_1}$ und $\overrightarrow{n_2}$ die Normalenvektoren der beiden Ebenen.

b) **► Lagebeziehung der Geraden g zur Ebene E** (7P)

Die Lagebeziehung fragt nach der Lage zweier Objekte im Raum zueinander.
Hier ist nach der Lagebeziehung zwischen der Geraden g und der Ebene E gefragt.

Es gibt zwei Möglichkeiten, wie diese zu einander liegen können:

1. Sie verlaufen parallel
2. Gerade liegt in der Ebene
3. Sie schneiden sich

Verlaufen eine Gerade und eine Ebene parallel, so steht der Normalenvektor der Ebene senkrecht auf dem Richtungsvektor der Gerade.
Ihr Skalarprodukt ist 0.

Dies gilt auch, wenn die Gerade in der Ebene liegt. Allerdings muss zusätzlich noch jeder Punkt der Geraden in der Ebene liegen. Prüfe dazu einen Punkte der Geraden, indem du ihn in die Koordinatengleichung der Ebene einsetzt.
Liegt der Punkt in der Ebene, so verläuft die Gerade in der Ebene. Ansonsten verlaufen Ebene und Gerade parallel.

Schneiden sich die Gerade und die Ebene, so haben sie einen Schnittpunkt.

Prüfe zunächst, ob der Richtungsvektor der Geraden und der Normalenvektor der Ebene senkrecht aufeinander stehen.

► Lagebeziehung von F und E

Für die Lagebeziehung zweier Ebenen gilt, dass sie entweder parallel verlaufen, identisch sein oder sich schneiden können.
Der Schnitt zwischen zwei Ebenen wird beschrieben durch eine Schnittgerade.
Zwei Ebenen verlaufen genau dann parallel, wenn ihre Normalenvektoren Vielfache von einander sind. Es gilt:

$\overrightarrow{n_F} = k \cdot \overrightarrow{n_E}$ mit $k \in \mathbb{N}$.

Liegt außerdem noch ein Punkt von E in F, so sind die Ebenen identisch.

Betrachte folglich zunächst das Verhältnis der Normalenvektoren. Du kannst drei Gleichungen aufstellen, um dies zu untersuchen. Diese setzen sich aus den Koordinaten der Normalenvektoren zusammen.

c) **► Zeigen, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist** (10P)

Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn zwei der Dreiecksseiten gleich lang sind.
Folglich musst du die Länge der Seiten bestimmen. Diese haben die Bezeichnung $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$.

Die Länge von Strecken zwischen zwei Punkten kannst du über die Länge des Vektors, den die beiden Punkte aufspannen bestimmen.
Folglich benötigst du die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$, um die gesuchten Seitenlängen zu bestimmen.
Einen Vektor kannst du wie folgt aufstellen.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Berechne nach dieser Vorgabe die Vektoren und im Anschluss ihre Länge. Vergleiche die Längen. Es müssen sich zweimal die selbe Länge ergeben, damit das Dreieck gleichschenklig ist.

► Größe des Winkels ACB bestimmen

Der Winkel ACB wird von den Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$ eingeschlossen.
Der „Buchstabe“ in Mitte bezeichnet den Punkt, an dem der Winkel liegt.

Den Winkel zwischen zwei Vektoren kannst du über die Formel

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{|\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}\right)$$

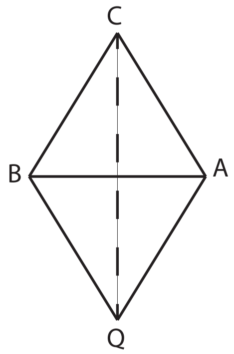
▶ Punkt Q finden

Der Punkt Q soll nach der Aufgabenstellung das Dreieck zu einer Raute ergänzen.

Eine Raute hat die Eigenschaft, dass alle Seiten gleich lang sind. Im Gegensatz zu einem Quadrat müssen allerdings immer nur zwei der vier Innenwinkel identisch sein.

Da du bereits zwei Seiten bestimmt hast, die gleich lang sind, kannst du den Punkt Q so legen, dass sich zwei weitere Seiten der Raute ergeben, die genauso lang sind.

Eine Raute baut sich wie folgt auf. Die beiden Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ sind gleich lang. Die Seite $\overline{AB}$ ist kürzer. Den gesuchten Aufbau der Raute kannst du dir wie in folgender Skizze dargestellt vorstellen.



Du kannst erkennen, dass sich die Strecken $\overline{CQ}$ und $\overline{AB}$ im Mittelpunkt von $\overline{AB}$ schneiden. Die Strecke $\overline{CQ}$ entspricht gerade der Strecke $2 \cdot \overline{CM}$.

Den Mittelpunkt M kannst du über die folgende Formel bestimmen.

$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2} \mid \frac{a_2+b_2}{2} \mid \frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

Gehe nach den folgenden Schritten vor, um den Punkt Q zu bestimmen.

1. Ermittle den Punkt M nach oben genannter Formel
2. Stelle den Vektor $\overrightarrow{CM}$ auf
3. Bestimme den Punkt Q über den Vektor $\overrightarrow{CM}$ wie in obiger Skizze abgebildet.

▶ Möglichen Punkt C^* bestimmen

Nun ist ein Punkt C^* gesucht, der so auf der z-Achse liegen soll, dass Der Winkel AC^*B genau $60°$ groß ist.

Stelle zunächst die Vektoren $\overrightarrow{AC^*}$ und $\overrightarrow{BC^*}$ auf. Über die Formel zur Berechnung für Winkel mit

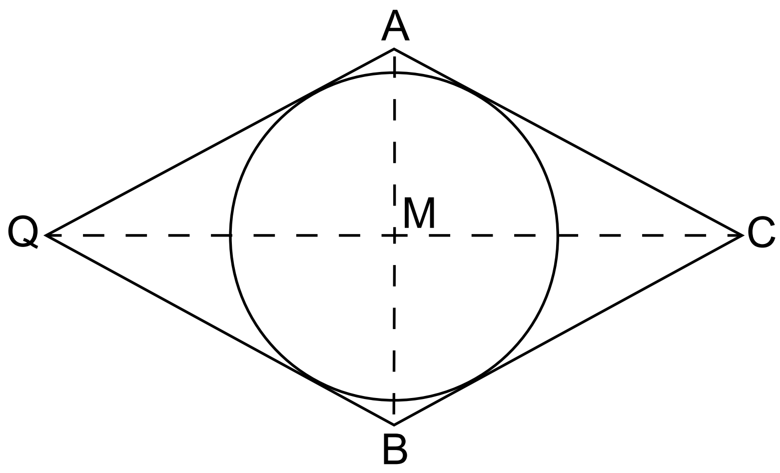
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{|\overrightarrow{AC^*} \circ \overrightarrow{BC^*}|}{|\overrightarrow{AC^*}| \cdot |\overrightarrow{BC^*}|}\right)$$

erhältst du dann die Bedingung, um C^* zu bestimmen.

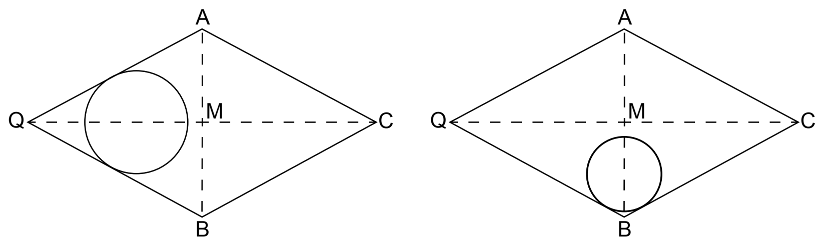
Da der Punkt C^* auf der x-Achse liegen soll, hat er allgemein die Koordinaten $C^* = (0 \mid 0 \mid c)$.

d) **► Kreis in der Raute** (6P)

Der Kreis soll in die Raute einbeschrieben werden. Folglich soll er die Seiten der Raute niemals schneiden. Dies kannst du dir so vorstellen:



Betrachtest du die Vorgabe der Aufagbe, so kannst du erkennen, dass der Kreis denselben Mittelpunkt haben muss wie die Raute, damit er den größtmöglichen Radius hat. Würdest du beispielsweise einen anderen Mittelpunkt wählen, so ergäbe sich die Situation so:



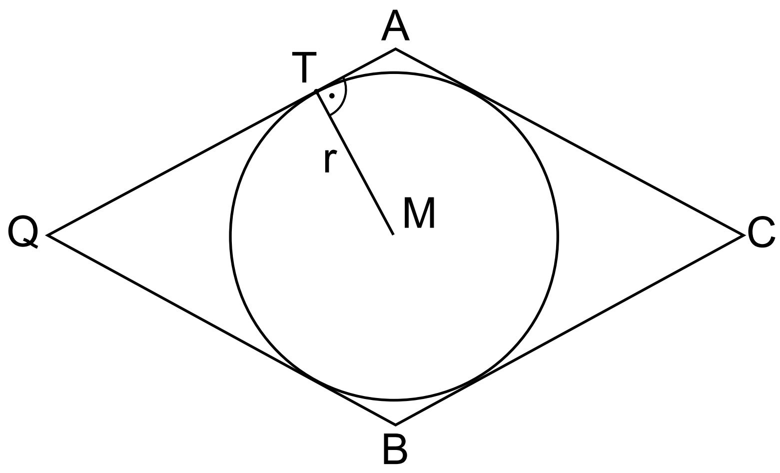
Dies ist darin begründet, dass die Grenzen, die durch die Seiten der Raute beschrieben werden, nicht durch den Kreis überschritten werden dürfen.

1. Schritt: Mittelpunkt des Kreises bestimmen

Oben haben wir festgestellt, dass der Kreis möglichst groß wird, wenn der Mittelpunkt des Kreises mit dem Mittelpunkt der Raute übereinstimmt.

2. Schritt: Radius des Kreises bestimmen

Da der Kreis in die Raute einbeschrieben werden soll, berührt er an vier Stellen die Raute. Der Radius steht in diesen Stellen senkrecht auf der jeweiligen Seite. Dies soll das folgende Bild verdeutlichen.



Folglich musst du den Punkt T bestimmen und dann den Abstand von M zu T, um den Radius zu erhalten.