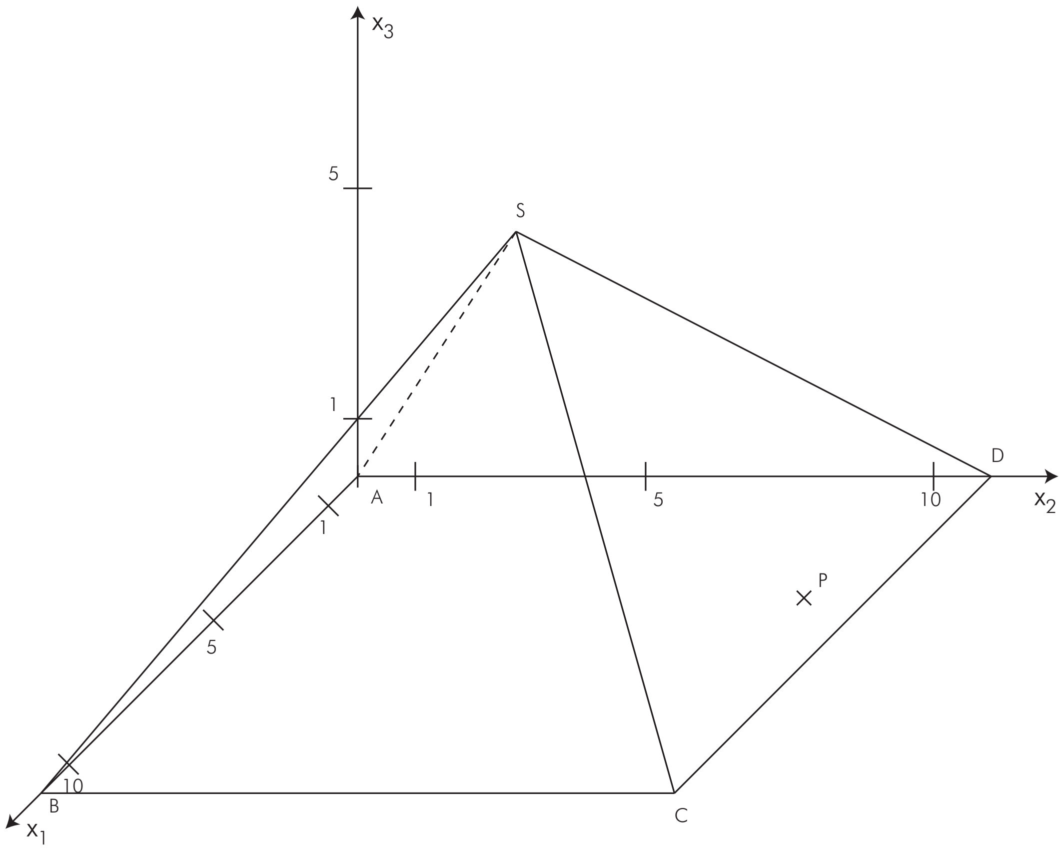
1. ▶ **Pyramide zeichnen (Punkt P aus Aufgabenteil 3. bereits mit eingezeichnet)** (7BE)



▶ **Maßstab für die Darstellung angeben**

Das Quadrat, das der echten Cheops-Pyramide zu Grunde liegt, hat eine Seitenlänge von etwa 440 Ellen. In unserer Darstellung misst die Seitenlänge des Quadrates 11 LE.

Berechne also den Maßstab unserer Darstellung:
$\frac{11}{440} = \frac{1}{40}$. Eine LE entspricht 40 Ellen.

2. ▶ **Ebenengleichung in Parameterform bestimmen** (7BE)

Wähle den Ortsvektor $\overrightarrow{OC}$ zum Punkt C als Stützvektor und die Vektoren $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{CS}$ als Richtungsvektoren. Dann ergibt sich die Parameterform:

$$E_1 : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 & - & 11 \\ 11 & - & 11 \\ 0 & - & 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5,5 & - & 11 \\ 5,5 & - & 11 \\ 7 & - & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -5,5 \\ -5,5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

► Ebenengleichung in Koordinatenform begründen

Ausgehend von der Ebenengleichung in Parameterform gibt es drei Möglichkeiten, die Koordinatenform der Ebenengleichung zu erhalten: Über eine **Punktprobe**, über **Ausmultiplizieren** und über den **Normalenvektor**.

►► Lösungsweg A: Koordinatenform über eine Punktprobe ermitteln

Eine Ebene wird durch **drei verschiedene Punkte** eindeutig bestimmt. Du weißt, dass die Punkte C, D und S in der Ebene E_1 liegen. Setze die Koordinaten der drei Punkte ein in die Koordinatenform und zeige, dass sie die Gleichung erfüllen:

Punkt C:

$14 \cdot 11 = 154$. Punkt C erfüllt die Gleichung und liegt in der Ebene.

Punkt D:

$14 \cdot 11 = 154$. Auch Punkt D erfüllt die Gleichung.

Punkt S:

$14 \cdot 5{,}5 + 11 \cdot 7 = 77 + 77 = 154$. Auch Punkt S erfüllt die Gleichung.

Damit ist nachgewiesen, dass die Ebene E_1 in Koordinatenform sich durch die selben drei Punkte aufspannen lässt wie die Ebene in Parameterform. Also handelt es sich um die gleichen Ebenen.

►► Lösungsweg B: Koordinatenform über Ausmultiplizieren ermitteln

Der Vektor $\overrightarrow{x}$ lässt sich schreiben also $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. „Teile" die Parameterform in die drei einzelnen Zeilen auf und erhalte ein lineares Gleichungssystem (LGS):

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x_1 & = & 11 - 11\lambda - 5{,}5\mu \\ \text{II} & x_2 & = & 11 \qquad\quad - 5{,}5\mu \\ \text{III} & x_3 & = & \qquad\qquad\quad 7\mu \end{array}$$

Eliminiere nun die Parameter λ und μ, indem du nach ihnen auflöst. Beginne mit III:

$$x_3 = 7\mu \quad |:7$$
$$\frac{x_3}{7} = \mu$$

Setze $\mu = \frac{x_3}{7}$ ein in II:

$$\begin{aligned} x_2 &= 11 - 5{,}5 \cdot \frac{x_3}{7} \\ x_2 &= 11 - \frac{11}{14}x_3 \qquad | \cdot 14 \\ 14x_2 &= 154 - 11x_3 \qquad | +11x_3 \end{aligned}$$

$$14x_2 + 11x_3 = 154$$

Damit ist nachgewiesen, dass die Ebenengleichung die Koordinatenform $E_1 : 14x_2 + 11x_3 = 154$ besitzt.

►► Lösungsweg C: Lösung über den Normalenvektor

Jede Ebene hat allgemein die Koordinatenform $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$, wobei die Koeffizienten a, b und c gleichzeitig die **Koordinaten des Normalenvektors** sind.

Der Normalenvektor $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf jeden der beiden Richtungsvektoren. Also ist das **Skalarprodukt** des Normalenvektors mit jedem der beiden Richtungsvektoren Null. Dies führt uns zu folgenden beiden Gleichungen:

$$\text{I} \quad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{II} \quad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -5,5 \\ -5,5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{I} \quad -11n_1 = 0 \qquad \text{II} \quad -5,5n_1 - 5,5n_2 + 7n_3 = 0$$

Aus I folgt: $n_1 = 0$. Setze dies ein in II:

$$\begin{aligned} -5,5n_2 + 7n_3 &= 0 && \mid +5,5n_2 \\ 7n_3 &= 5,5n_2 && \mid :7 \\ n_3 &= \tfrac{11}{14}n_2 \end{aligned}$$

Der Normalenvektor hat nun also die Koordinaten $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ n_2 \\ \frac{11}{14}n_2 \end{pmatrix}$. Beim Normalenvektor kommt es auf die **Richtung** an und nicht auf die **Länge**. Wähle nun also einen beliebigen Wert für n_2. So veränderst du nur die Länge des Vektors, nicht aber die Richtung.

Wähle z.B. $n_2 = 14$ und erhalte den Normalenvektor $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Die Koordinaten des Normalenvektors sind die Koeffizienten in der Koordinatenform der Ebene. Damit gilt für die Koordinatenform zunächst:
$E_1: 14x_2 + 11x_3 = d$. Setze nun die Koordinaten des Stützvektors $\overrightarrow{OC}$ ein und löse nach d auf:

$$14 \cdot 11 + 11 \cdot 0 = d = 154$$

Damit ist nachgewiesen, dass die Ebenengleichung die Koordinatenform $E_1: 14x_2 + 11x_3 = 154$ besitzt.

3. **► Koordinaten des Zugangs bestimmen** (8BE)

Der Zugang ist punktförmig gedacht, also gib ihm einen Namen, z.B. P. Er liegt zunächst mittig bezogen auf die Grundkante $\overline{CD}$. Diese wiederum verläuft parallel zur x_1-Achse. Damit kennst du bereits die x_1-Koordinate von P, nämlich $x_1 = 5,5$.

Weiterhin ist bekannt, dass er in einer Höhe von 28 Ellen liegt. Mit dieser Information bestimmst die x_3-Koordinate von P. Im Aufgabenteil 1. hast du ermittelt, dass 1 LE für 40 Ellen steht. Damit entsprechen 28 Ellen genau $\frac{28}{40} = 0,7$ LE.

P hat nun also die Koordinaten $P\,(5,5 \mid x_2 \mid 0,7)$. Es fehlt noch die x_2-Koordinate. Überlege deshalb, in welcher Ebene P liegen muss: Da er ein Punkt der Pyramide ist, liegt er in der Ebene E_1, welche durch die Punkte C, D und S aufgespannt wird.

Setze also die bisher bekannten Koordinaten von P ein in die Ebenengleichung von E_1 und löse nach x_2 auf:

$$14x_2 + 11 \cdot 0,7 = 154$$

$$\begin{aligned} 14x_2 + 7,7 &= 154 && \mid -7,7 \\ 14x_2 &= 146,3 && \mid : 14 \\ x_2 &= 10,45 \end{aligned}$$

P hat damit die Koordinaten $P\,(5,5 \mid 10,45 \mid\approx 0,7)$.

Den Punkt P haben wir bereits im Schaubild der Pyramide in Aufgabenteil 1. mit eingezeichnet.

4. ▶ **Lage von P nachweisen** (8BE)

Die Aufgabe ist in einzelnen Schritten zu lösen:

1. Zeige, dass P in der Ebene E_2 liegt, welche die Rampe darstellt. Somit ist P als ein Punkt der Rampe nachgewiesen
2. Bestimme die Punkte R_1 und R_2, in denen die beiden Geraden die Seitenfläche CDS der Pyramide schneiden. Sie stellen die Begrenzungspunkte der Rampe dar.
3. Zeige, dass P sich zwischen diesen beiden Punkten R_1 und R_2 befindet.

1. Schritt: Lage von P in E_2 nachweisen

Die Ebene E_2 stellt die Oberfläche der Rampe dar. Setze die Koordinaten von P in Gleichung von E_2 ein und zeige somit durch Punktprobe, dass P ein Punkt der Rampe ist:

$1,4 \cdot 10,45 + 19,1 \cdot 0,7 = 28$. P liegt in der Rampe.

2. Schritt: Begrenzungspunkte R_1 und R_2 bestimmen

R_1 und R_2 sind die Punkte, in denen die Geraden g_1 und g_2 auf die Seitenfläche CDS der Pyramide treffen. Diese Seitenfläche liegt in der Ebene E_1 aus Aufgabenteil 1. Berechne also die Schnittpunkte der beiden Geraden mit der Ebene E_1.

Teile hierzu zunächst die Gleichungen der Geraden in die einzelnen drei Zeilen auf:

$$g_1: \begin{aligned} x_1 &= 4 - r \\ x_2 &= 20 + 9,55r \\ x_3 &= -0,7r \end{aligned} \qquad g_2: \begin{aligned} x_1 &= 7 + t \\ x_2 &= 20 + 9,55t \\ x_3 &= -0,7t \end{aligned}$$

Setze die Werte für x_1, x_2 und x_3 in die Koordinatenform der Ebene E_1 ein und löse nach r bzw. nach t auf:

Für g_1 ergibt sich:

$$\begin{aligned} 14 \cdot (20 + 9{,}55r) + 11 \cdot (-0{,}7r) &= 154 \\ 280 + 133{,}7r - 7{,}7r &= 154 \qquad \mid -280 \\ 126r &= -126 \qquad \mid : 126 \\ r &= -1 \end{aligned}$$

Setze $r = -1$ ein in die Gleichung der Geraden g_1 und erhalte den Schnittpunkt $R_1\,(5 \mid 10{,}45 \mid 0{,}7)$.

Für g_2 ergibt sich:

$$\begin{aligned} 14 \cdot (20 + 9{,}55t) + 11 \cdot (-0{,}7t) &= 154 \qquad \text{Anmerkung: Gleiche Zahlen wie bei } g_1 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

Setze $t = -1$ ein in die Gleichung der Geraden g_2 und erhalte den Schnittpunkt $R_2\,(6 \mid 10{,}45 \mid 0{,}7)$.

3. Schritt: Lage von P zwischen R_1 und R_2 nachweisen

Du erkennst anhand der x_2- und x_3-Koordinaten, dass R_1, P und R_2 in einer Geraden liegen. Sie unterscheiden sich lediglich in ihrer x_1-Koordinate.

Da sich die x_1-Koordinate von P mit $5 < 5{,}5 < 6$ genau zwischen den x_1-Koordinaten von R_1 und R_2 befindet und die übrigen Koordinaten genau gleich sind, ist gezeigt, dass P sich zwischen diesen beiden Punkten befindet.

R_1 und R_2 befinden sich außerdem auf den Begrenzungsgeraden g_1 und g_2. Damit liegt P auch zwischen den Begrenzungsgeraden.