2. a) ▶ **Bestimmen des Zeitpunkts t_E des stärksten Wachstums** (8P)

Die Funktion f_k mit $f_k(t) = t \cdot \mathrm{e}^{-kt}$ mit $k \in \mathbb{R}^+,\ t \in \mathbb{R}_0^+$ beschreibt die Wachstumsrate in Anzahl pro Liter und Minute.

Der Zeitpunkt t_E des stärksten Wachstums entspricht also der t-Stelle des Maximums dieser Funktion.

Du kannst so vorgehen:

- Bestimme zunächst die ersten beiden Ableitungen von f_k
- Prüfe mit dem notwendigen Kriterium $f_k'(t) = 0$, wo sich mögliche Extremstellen befinden.
- Untersuche die **Art** dieser Extremstellen

▶ **Bestimmen der Wachstumsrate zum Zeitpunkt t_E**

Die Funktion f_k mit $f_k(t) = t \cdot \mathrm{e}^{-kt}$ beschreibt die Wachstumsrate. Die Wachstumsrate zum Zeitpunkt t_E entspricht also dem Funktionswert von t_E. Setze also $t_E = \frac{1}{k}$ in die Funktionsgleichung ein und berechne den zugehörigen Funktionswert.

b) ▶ **Bestimmen der Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f_k** (5P)

Analog zu oben kannst du so vorgehen:

- Bestimme zunächst die dritte Ableitung von f_k
- Prüfe mit dem notwendigen Kriterium $f_k''(t) = 0$, wo sich mögliche Wendestellen befinden.
- Untersuche, ob es sich tatsächlich um Wendestellen handelt
- Bestimme zuletzt über $f_k(t)$ die zugehörige y-Koordinate.

▶ **Angabe der Bedeutung des Wendepunkts im Sachzusammenhang**

Der Wendestelle ist das Extremum der ersten Ableitung einer Funktion. Am Wendepunkt ist also die Steigung der Funktion extrem.

Die Funktion f_k beschreibt die Wachstumsrate der Bakterien in einem belichtetem Wasserbecken. Überlege, welche Bedeutung dann der **Ableitung** f_k' im Sachzusammenhang zukommt.

c) ▶ **Bestimmen der Stammfunktion** (7P)

Bestimme zunächst die allgemeine Stammfunktionen, von der sich alle Stammfunktionen der Funktion durch einen Summanden unterscheiden und bestimme anschließend aus dieser allgemeinen Stammfunktion diejenige, die die Bedingung $F_k(0) = 1$ erfüllt.

1. Schritt: Bestimmen der allgemeinen Stammfunktionen

Die Stammfunktion der Funktion f_k mit $f_k(t) = t \cdot \mathrm{e}^{-kt}$ kannst du über partielle Integration bestimmen:

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u'v$$

Dabei ist es wichtig, die Faktoren der Funktion so auf u und v' zu verteilen, sodass du von $u'v$ die Stammfunktion bilden kannst.

$$u = t \qquad \Longrightarrow \qquad u' = 1$$
$$v' = \mathrm{e}^{-kt} \qquad \Longrightarrow \qquad v = -\frac{1}{k} \cdot \mathrm{e}^{-kt}$$

2. Schritt: Berechnen von C

Du sollst C so berechnen, dass $F_k(0) = 1$ gilt.

Hierzu musst du das C, durch das sich alle möglichen Stammfunktionen unterscheiden, so berechnen, dass diese Bedingung erfüllt ist. Hierzu setzt du die Bedingung in die Gleichung der allgemeinen Stammfunktion ein und löst nach C auf:

$$F_k(0) = 1$$

▶ Bedeutung der Stammfunktion im Sachzusammenhang

Die Funktion f_k gibt die Wachstumsrate der Bakterien in Anzahl pro Liter und Minute an. Dies entspricht der Konzentrationsänderung der Bakterien. Überlege, welche Bedeutung dann der **Stammfunktion** F_k im Sachzusammenhang zukommt.

d) **▶ Zeichnen der Graphen der Funktion $f_{0,5}$ und ihrer Stammfunktion $F_{0,5}$** (7P)

Vom Graphen der Funktion f_k hast du im ersten Aufgabenteil bereits wichtige Punkte berechnet. Setze in diese das angegebene $k = 0,5$ ein.

Von der Stammfunktion F_k kennst du jedoch bis jetzt nur den y-Achsenabschnitt.

Berechne im zu zeichnenden Bereich $0 \leq t \leq 10$ einige Punkte der Graphen beider Funktionen, durch die du dann die Graphen der beiden Funktionen zeichnen kannst. Dies kannst du, je nach Taschenrechner, auch über dessen Tabellenfunktion.

▶ Beschreiben des Einflusses des Parameters k auf die Graphen von f_k und F_k

Betrachte, um über den Einfluss des Parameters k auf das Aussehen der Graphen beschreiben zu können, zunächst die Funktionsgleichung und die Koordinaten des Extrem- und des Wendepunkts. Beschreibe so zunächst den Einfluss des Parameters k auf den Verlauf des Graphen der Funktion f_k. Schließe von diesem dann auf den Verlauf des Graphen von F_k. Der Graph von F_k ist der Graph der Stammfunktion der Funktion f_k und hängt somit vom Verlauf des Graphen der Funktion f_k ab.

e) **▶ Begründung einer endlichen Zahl als Grenzwert** (3P)

Die Funktion F_k beschreibt den Inhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion f_k. Überlege dir, wie der Graph der Funktion f_k sich für $t \to \infty$ verhalten muss, damit die darunter eingeschlossene Fläche für $t \to \infty$ einen endlichen Flächeninhalt annimmt. Weise dies nach und begründe so die Aussage.

▶ Bestimmen des Grenzwerts von F_k

Die Stammfunktion F_k lautet $F_k(t) = \dfrac{1 + k^2 - (1 + k \cdot t) \cdot \mathrm{e}^{-kt}}{k^2}$.

Deren Grenzwert musst du nun für $t \to \infty$ berechnen. Teile dazu zunächst den Bruch auf, sodass du den von t unabhängigen Teil abtrennst und lasse dann t gegen Unendliche streben.

$$\frac{1+k^2-(1+k\cdot t)\cdot \mathrm{e}^{-kt}}{k^2} = \frac{1+k^2}{k^2} - \frac{(1+k\cdot t)\cdot \mathrm{e}^{-kt}}{k^2}$$

Untersuche nun den Grenzwert der Stammfunktion, indem du das Verhalten des von t abhängigen Teils für $t \to \infty$ untersuchst:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} F_k(t) &= \frac{1+k^2}{k^2} - \lim_{t\to\infty} \frac{(1+k\cdot t)\cdot \mathrm{e}^{-kt}}{k^2} \\
&= \frac{1}{k^2} + 1 - \lim_{t\to\infty} \frac{(1+k\cdot t)\cdot \mathrm{e}^{-kt}}{k^2} \\
&= \frac{1}{k^2} + 1 - \lim_{t\to\infty} \left[(1+k\cdot t)\cdot \mathrm{e}^{-kt}\right]\cdot \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{1}{k^2} + 1 - \lim_{t\to\infty} \left[\frac{(1+k\cdot t)}{\mathrm{e}^{kt}}\right]\cdot \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{1}{k^2} + 1 - \lim_{t\to\infty} \left[\frac{k}{t\cdot \mathrm{e}^{kt}}\right]\cdot \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{1}{k^2} + 1 - 0 \\
&= \frac{1}{k^2} + 1
\end{aligned}$$

Die Funktionswerte $F_k(t)$ streben, wenn t gegen Unendlich strebt, gegen die feste Zahl $\boldsymbol{\frac{1}{k^2}+1}$.

▶ Angabe der Bedeutung des Grenzwerts im Sachzusammenhang

Die Stammfunktion F_k beschreibt, wie in Aufgabenteil c bereits angegeben, die Konzentration der Bakterien. **Die Konzentration der Bakterien nähert sich von unten einem festen Wert an, ist also nach oben begrenzt**, wobei diese Konzentration abhängig ist von unterschiedlichen Faktoren, die sich in der Zeitkonstante k widerspiegeln.