Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$.
In der Anlage ist der Graph der Funktion f zu sehen.

a) Weisen Sie nach, dass der Punkt $W(2 \mid 2)$ Wendepunkt des Graphen von f ist. (11P)

Bestimmen Sie die Steigung des Graphen von f an den Stellen $x = -2$ und $x = 6$ sowie im Wendepunkt W.

Begründen Sie, dass der Graph von f in keinem Punkt eine größere Steigung besitzt als im Punkt W.

b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F zu der Funktion f. (14P)

Die Gerade g mit $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ schneidet den Graphen von f in drei Punkten und umschließt mit ihm eine Fläche, die sich aus zwei Flächenstücken zusammensetzt.

Zeichnen Sie die Gerade g in das Koordinatensystem der Anlage.

Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Interpretieren Sie die Bedeutung folgender Gleichung: $\int_{-2}^{6} (f(x) - g(x))dx = 0$.

c) Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3 \cdot k}{8} \cdot x^2; \quad k > 0$. (11P)

Bestimmen Sie die Gleichung der Ortslinie, auf der alle Wendepunkte der Graphen der Schar f_k liegen. (Zur Kontrolle: $h(x) = \frac{1}{4}x^3, \quad x > 0$)

Für jedes $k > 0$ gilt, dass sich die Ortslinie der Wendepunkte und der Graph der Funktion f_k im Wendepunkt W_k schneiden.

Untersuchen Sie, ob folgende Aussage gültig ist:

Im Wendepunkt W_k ist die Steigung der Ortslinie der Wendepunkte doppelt so groß wie die Steigung des Graphen der Funktion f_k.

d) Für jedes $k > 0$ besitzt der Graph der Funktion f_k im 1. Quadranten neben dem Wendepunkt auch einen Hochpunkt. (9P)

Untersuchen Sie, ob für jedes $k > 0$ die folgende Aussage gültig ist:

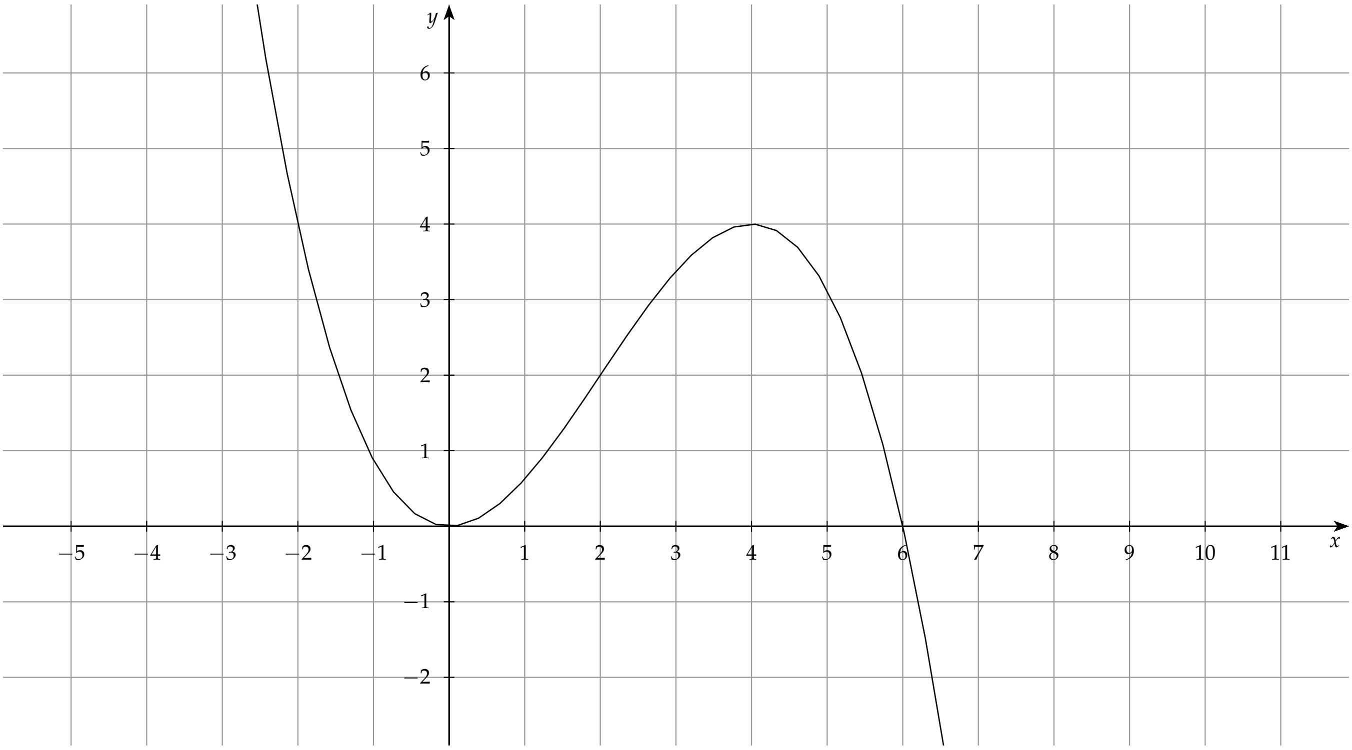
Die Gerade durch den Ursprung und den Wendepunkt verläuft auch durch den Hochpunkt.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

Material

Anlage

Graph der Funktion f



Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.