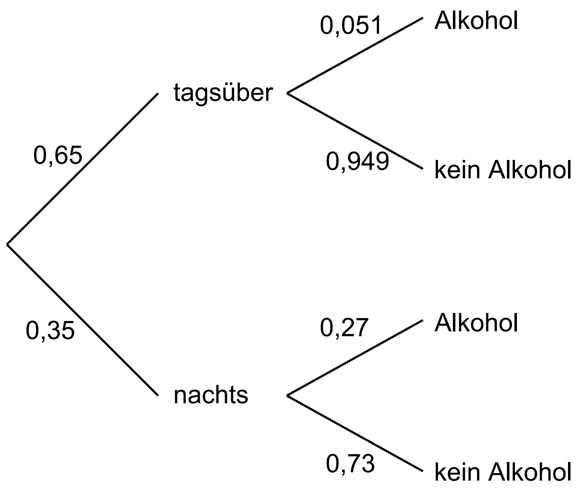
1.1 **► Baumdiagramm zeichnen** (4BE)

Wie in der Aufgabenstellung bezeichnen wir den Bereich zwischen 4 Uhr und 18 Uhr mit „tagsüber“ und den Bereich zwischen 18 Uhr und 4 Uhr mit „nachts“. Dann folgt:

- Tagsüber ereignen sich 65 % aller Unfälle mit Personenschaden, also ereignen sich nachts 35 % aller Unfälle mit Personenschaden.
- Tagsüber werden 5,1 % aller Unfälle mit Personenschaden unter Alkoholeinfluss verursacht, als werden 94,9 % ohne Alkohol verursacht. Nachts sind es entsprechend 27 % mit Alkohol und 73 % ohne Alkohol.

Stelle dies in einem Baumdiagramm dar:



1.2 **► Wahrscheinlichkeiten berechnen** (4BE)

Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten folgen direkt aus dem Baumdiagramm. Du kannst sie mit der **Pfadregel** bestimmen. Zur Vereinfachung der Schreibweise zunächst zwei Definitionen: T sei „Ein Unfall mit Personenschaden ereignet sich tagsüber“, N das entsprechende Gegenereignis. Ebenso sei M das Ereignis „Ein Unfall mit Personenschaden wurde unter Alkoholeinfluss verursacht“ und O das zugehörige Gegenereignis.

1. Schritt: Ereignis *A*

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(T \cap O) = 0,65 \cdot 0,949 \approx 0,6169$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 61,69 % wurde der Unfall zwischen 4 und 18 Uhr ohne Alkoholeinfluss verursacht.

2. Schritt: Ereignis *B*

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(M)$:

$P(M) = P(T \cap M) + P(N \cap M) = 0,65 \cdot 0,051 + 0,35 \cdot 0,27 \approx 0,1277$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 12,77 % wurde der Unfall unter Alkoholeinfluss verursacht.

1.3 **► Gleichung im Sachzusammenhang erläutern** (3BE)

Vergleiche die multiplizierten Wahrscheinlichkeiten mit den Pfaden im Baumdiagramm:

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{0,35 \cdot 0,27}{0,65 \cdot 0,051 + 0,35 \cdot 0,27} \\ &= \frac{P(N \cap M)}{P(T \cap M) + P(N \cap M)} \\ &= \frac{P(N \cap M)}{P(M)} \\ &= P_M(N) \end{aligned}$$

Hier wird also eine **bedingte Wahrscheinlichkeit** berechnet. Gefragt war dabei nach der Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Unfall mit Personenschaden, der unter Alkoholeinfluss verursacht wurde, nachts ereignet hatte. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt etwa 74 %.

2.1 ▶ **Näherung als Bernoulli-Kette begründen** (6BE)

Streng genommen liegt bei einer Bernoulli-Kette folgende Situation vor:

- Ein Urne enthält **genau** zwei Sorten von Kugeln.
- Es wird k mal mit Zurücklegen gezogen.
- Die einzelnen Ziehungen verlaufen **unabhängig** von einander. Sie beeinflussen sich gegenseitig nicht.

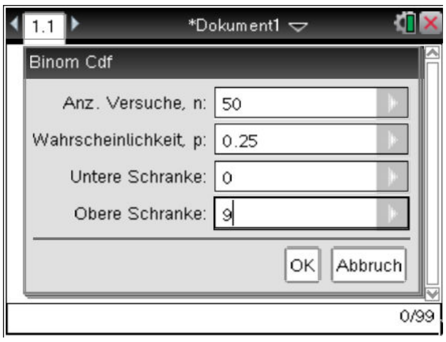
Unsere Situation in der Registratur ist etwas anders, aber durchaus ähnlich:

- Die Registratur enthält **genau** zwei Sorten von Akten: die über junge Erwachsene und die über nicht-junge Erwachsene.
- Die Akten werden **zufällig gezogen**, allerdings **ohne Zurücklegen**. Da die Registratur allerdings „sehr groß“ ist, kann davon ausgegangen werden, dass das Ziehen von 50 Akten die Verteilung von Akten über junge vs. nicht-junge Erwachsene nicht signifikant beeinflusst. Deshalb kann **grob** von einem Ziehen mit Zurücklegen ausgegangen werden.
- Auch hier verlaufen die einzelnen Ziehungen unabhängig, da die Akten nicht gekennzeichnet sind oder nach einem bestimmten System gezogen werden.

Sei also X die Anzahl der Akten, in denen junge Erwachsene als Unfallverursacher festgestellt werden und sei X binomialverteilt. Aus dem Aufgabentext geht hervor: ein Viertel der Unfälle unter Alkoholeinfluss wurden von jungen Erwachsenen verursacht. Damit erhalten wir den Parameter $p = 0,25$. Außerdem werden 50 Akten betrachtet, wodurch wir $n = 50$ erhalten.

1. Schritt: Ereignis D

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 9)$. Berechne die Wahrscheinlichkeit über `menu → 5 → 5 → E:BinomialCdf`.

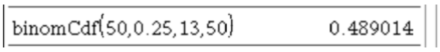


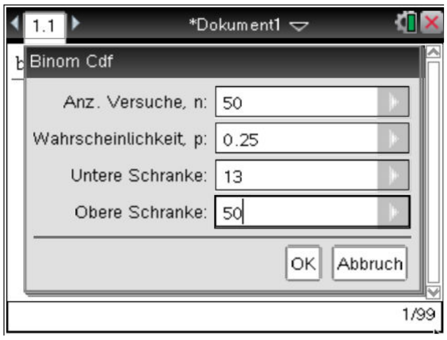
binomCdf(50,0.25,0,9)   0.163684

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 16,37 % werden in höchstens 9 Fällen junge Erwachsene als Unfallverursacher festgestellt.

2. Schritt: Ereignis *E*

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(X > 12) = P(X \geq 13)$. Berechne die Wahrscheinlichkeit über `menu → 5 → 5 → E:BinomialCdf`.





Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 48,9 % werden in mehr als 12 Fällen junge Erwachsene als Unfallverursacher festgestellt.

2.2 ▶ **Rechnung erklären und interpretieren** (5BE)

Betrachten wir zunächst die erste Zeile. X ist die Anzahl der jungen Erwachsenen, die als Unfallverursacher festgestellt werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Akte gefunden wird, die einen jungen Erwachsenen als Unfallverursacher nennt, soll größer als 0,8 sein. Im weiteren Verlauf der Rechnung, nämlich in Zeile II und III, tritt der Parameter n auf. Er bezeichnet die Anzahl der beobachteten Akten.

Die Aufgabenstellung für diese Rechnung war also: Bestimme die kleinstmögliche Anzahl n der zu ziehenden Akten, sodass mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80 % mindestens eine der Akten einen jungen Erwachsenen als Unfallverursacher nennt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein junger Erwachsener der Unfallverursacher ist, ist dabei nach wie vor 0,25.

Von Zeile I bis Zeile II werden einige Umformungsschritte ausgeführt:

$$\begin{aligned}
P(X \geq 1) &> 0,8 && \mid \text{Rechnen mit dem Gegenereignis}\\
1 - P(X = 0) &> 0,8 && \mid \text{binomialverteilt mit } p = 0,25,\ n \text{ unbekannt}\\
1 - \binom{n}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^n &> 0,8 &&\\
1 - 0,75^n &> 0,8 &&
\end{aligned}$$

In der Aufgabenstellung wird 0,75 als Bruch $\frac{3}{4}$ dargestellt, ansonsten sind die Ungleichungen identisch.

Von Zeile II zu III werden vor allem die Logarithmusgesetze angewandt, um die Ungleichung zu lösen:

$$\begin{aligned}
1 - 0,75^n &> 0,8 && \mid -1\\
-0,75^n &> -0,2 && \mid \cdot(-1)\\
0,75^n &< 0,2 && \mid \ln(\ )\\
\ln(0,75^n) &< \ln(0,2) && \mid \ln(a^b) = b \cdot \ln(a)\\
n \cdot \ln(0,75) &< \ln(0,2) && \mid : \ln(0,75) \quad \text{Achtung: } \ln(0,75) < 0\\
n &> \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,75)} \approx 5,59 &&
\end{aligned}$$

Es müssen also mindestens 6 Akten betrachtet werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80 % mindestens eine der Akten einen jungen Erwachsenen als Unfallverursacher nennt.

3. **► Hypothesentest entwickeln** (8BE)

Getestet wird die Nullhypothese $H_0 : p \geq 0,3$.

Sei X die Anzahl der Schülerinnen und Schüler, die schon einmal unter Alkoholeinfluss gefahren sind. Mit der gleichen Begründung wie in 2.1 kann X als binomialverteilt angenommen werden. Bei wahrer Nullhypothese sind die zugehörigen Parameter der Binomialverteilung dann $n = 100$ und $p = 0,3$.

Die Nullhypothese wird **abgelehnt**, wenn besonders wenige Schülerinnen und Schüler schon einmal unter Alkoholeinfluss gefahren sind. Damit erhalten wir den **Ablehnungsbereich** $\overline{A} = \{0, ..., k\}$ mit einer noch unbekannten oberen Grenze und entsprechend den **Annahmebereich** $A = \{k+1, ..., 100\}$.

Das Signifikanzniveau des Tests soll bei $\alpha = 0,05$ liegen. Das bedeutet: die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese irrtümlicherweise abgelehnt wird, soll höchstens 5 % betragen:

$P(X \in \overline{A}) \leq 0,05 \;\Leftrightarrow\; P(X \leq k) \leq 0,05.$

Finde nun durch **systematisches Probieren** mit dem CAS einen Wert für k, der diese Ungleichung **gerade noch** erfüllt. Die kumulierte Binomialverteilung findest du dabei unter `menu → 5 → 5 → E:BinomialCdf`.

binomCdf(100,0.3,21)	0.028831
binomCdf(100,0.3,22)	0.047866
binomCdf(100,0.3,23)	0.075531

Das CAS liefert:

$P(X \leq 21) \approx 0,0288 < 0,05$; $P(X \leq 22) \approx 0,0479 < 0,05$; $P(X \leq 23) \approx 0,0755 > 0,05$.

Damit folgt der Wert $k = 22$ und damit die Entscheidungsregel: Wenn **höchstens 22** Schülerinnen und Schüler angeben, schon einmal unter Alkoholeinfluss gefahren zu sein, dann wird die Nullhypothese $H_0 : p \geq 0,3$ zugunsten der Alternative $H_1 : p < 0,3$ abgelehnt.