a) ▶ **Wahrscheinlichkeiten bestimmen** (7P)

Die Aufgabe gibt dir vor, dass die beiden Zufallsgeräte je einmal geworfen werden sollen. Du sollst dann die jeweilige Wahrscheinlichkeit bestimmen, mit der A_1, A_2 oder A_3 eintreten.

Für den Quader Q hast du vorgegeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Ergebnis eintritt. Der Würfel W wird als Laplace-Würfel beschrieben. Ein Laplace-Würfel hat die Eigenschaften eines idealen Würfels. Das bedeutet, dass jedes der Ereignisse mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintritt.

Jedes der Zufallsgeräte hat sechs Seiten, die mit den Augenzahlen 1, 3 und 5 belegt sind. Gegenüberliegende Seiten sollen die gleiche Augenzahl zeigen. Also gibt es zwei Seiten, die die 1 zeigen, zwei, die die 3 zeigen und wiederum zwei, die die 5 zeigen.

Somit kannst du die Wahrscheinlichkeit, dass beim Würfel W eine bestimmte Zahl gezeigt wird, so beschreiben:

$$P_W(1) = P_W(3) = P_W(5) = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Bestimme nun über die relativen Häufigkeiten die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.

▶ **Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A_1 bestimmen**

Die Aufgabenstellung gibt dir vor, dass die Wahrscheinlichkeit dafür gesucht ist, mit der der Würfel W nicht den Wert 5 annimmt. Es ist also gesucht

$$P(W \text{ nicht } 5)$$

Wenn 5 nicht eintreten soll, heißt das im Umkehrschluss, dass nur 1 und 3 die gezeigte Augenzahl sein soll. Somit kannst du die gesuchte Wahrscheinlichkeit auch so schreiben:

$$\begin{aligned} P(W \text{ nicht } 5) &= P(W \text{ ist } 1 \text{ oder } 3) \\ &= P(W \text{ ist } 1) + P(W \text{ ist } 3) \end{aligned}$$

Diese Wahrscheinlichkeiten musst du nun nach der Pfadregel addieren. Setze dazu die relativen Häufigkeiten der jeweiligen Ereignisse ein.

$$P(W \text{ nicht } 5) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 66{,}67\,\%$$

Somit tritt das Ereignis A_1 mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 66,67 % ein.

▶ **Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A_2 bestimmen**

Die Ausgangslage ist wieder dieselbe wie bereits für das vorangehende Ereignis. Gesucht ist folglich:

$$\begin{aligned} P(Q \text{ nicht } 5) &= P(Q \text{ ist } 1 \text{ oder } 3) \\ &= P(Q \text{ ist } 1) + P(Q \text{ ist } 3) \end{aligned}$$

Lies die Wahrscheinlichkeiten aus der gegebenen Tabelle ab. Es ergeben sich die jeweiligen relativen Häufigkeiten mit:

$$P_Q(1) = 41\,\% = \frac{41}{100}$$

$$P_Q(3) = 18\,\% = \frac{18}{100}$$

Somit kannst du die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_2 nach der Pfadregel so berechnen:

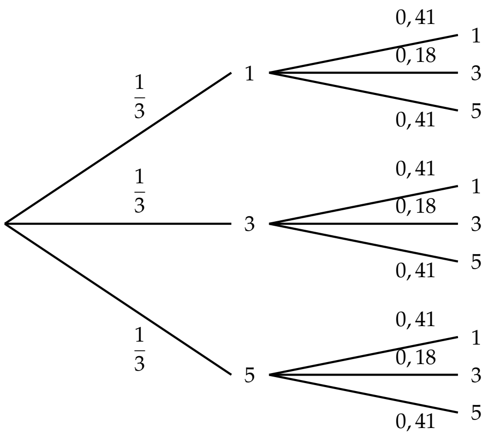
$$P(Q \text{ nicht } 5) = \frac{41}{100} + \frac{18}{100} = \frac{59}{100} = 59\,\%$$

Somit tritt das Ereignis A_2 mit einer Wahrscheinlichkeit von 59 % ein.

► Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A_3 bestimmen

Nun sollst du die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, dass die Augenzahlen der Würfel als Summe genau Sechs ergeben.

Überlege dir zunächst, welche Ereignisse eintreten können und bestimme dann die Wahrscheinlichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Würfe eintreten, kannst du dann über ein Baumdiagramm betrachten. Es wird zuerst Q und dann W geworfen.



Suche nun alle Pfade, die als Summe der Würfe eine Sechs ergeben. Es ergeben sich genau 3 Pfade, für die dieser Fall eintritt. Diese lauten wie folgt.

I. $Q = 1$ und $W = 5$

II. $Q = 3$ und $W = 3$

III. $Q = 5$ und $W = 1$

Berechne nun die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Pfade nach der Pfadregel. Diese gibt vor, dass Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades multipliziert werden, um die resultierende Wahrscheinlichkeit zu erhalten. Wahrscheinlichkeiten zwischen zwei Pfaden werden durch Addition berechnet.

Es ergeben sich die folgenden Werte für die Wahrscheinlichkeiten.

I: $P(Q = 1 \text{ und } W = 5) = 0,41 \cdot \frac{1}{3} = \frac{41}{100} \cdot \frac{1}{3} = \frac{41}{300}$

II: $P(Q = 3 \text{ und } W = 3) = 0,18 \cdot \frac{1}{3} = \frac{18}{100} \cdot \frac{1}{3} = \frac{18}{300}$

III: $P(Q = 5 \text{ und } W = 1) = 0,41 \cdot \frac{1}{3} = \frac{41}{100} \cdot \frac{1}{3} = \frac{41}{300}$

Nach der Pfadregel musst du nun diese Wahrscheinlichkeiten addieren, um die gesamte Wahrscheinlichkeit zu erhalten. Kürze dein Ergebnis so weit wie möglich.

$$\frac{41}{300} + \frac{18}{300} + \frac{41}{300} = \frac{41 + 18 + 41}{300} = \frac{100}{300} = \frac{1}{3} \approx 33,33\,\%$$

Somit tritt das Ereignis A_3 mit der Wahrscheinlichkeit $33,33\,\%$ ein. Dies kannst du auch an dem Baumdiagramm erkennen. Es gibt insgesamt neun Pfade von denen drei zum Ziel führen.

Daher ergibt sich die Wahrscheinlichkeit

$$P(\text{Ergebnis ist Sechs}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \approx 33,33\,\%$$

Somit hast du alle gesuchten Wahrscheinlichkeiten bestimmt.

b) ▶ **Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B_1 bestimmen** (5P)

Die Aufgabe gibt dir vor, dass das Zufallsgerät Q genau 10-mal geworfen werden soll. Du sollst nun die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, dass die Augenzahl 3 genau dreimal auftritt.

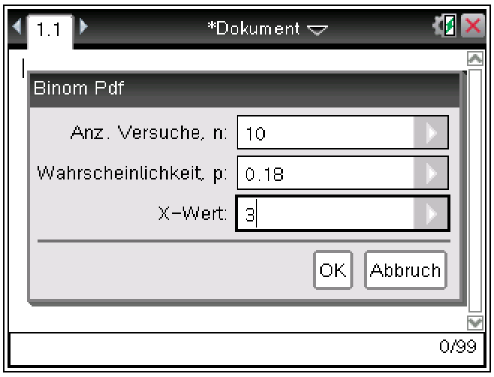
Sei X die Zufallsgröße, die die Anzahl k der Treffer der Augenzahl 3 beschreibt. X kann hier als binomialverteilt angenommen werden, da es sich bei dem vorgegebenen Experiment um eine Bernoulli-Kette handelt, die eine Länge von $n = 10$ aufweist.

Die Wahrscheinlichkeit eines Treffers der Augenzahl 3 ist gegeben mit $p = 18\,\% = 0,18$.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 3 Mal die 3 auftritt; also die Wahrscheinlichkeit $P(X = 3)$.

Den Befehl für die Binomialverteilung findest du unter `menu → 5 → 5 → D`. Gib für $n = 10$, $p = 0,18$ und für $X = 3$ ein.

```
binomPdf(10,0.18,3)        0.17446
```



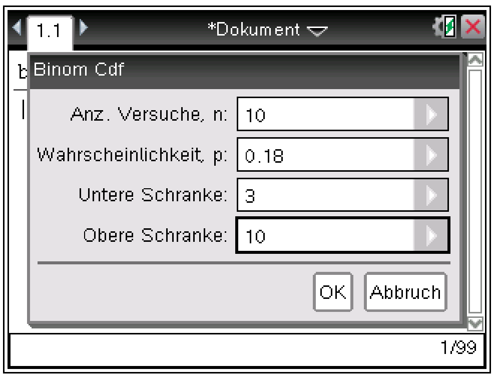
Somit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass die 3 bei 10 Würfen genau dreimal geworfen wird, mit ca. 17, 45%.

▶ **Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B_2 bestimmen**

Nun soll die Augenzahl 3 bei gleicher Anzahl an Würfen des Zufallsgeräts Q mindestens 3 mal geworfen werden. Folglich suchst du nun die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 3)$.

Den Befehl für die kumulierte Binomialverteilung findest du unter `menu → 5 → 5 → E`. Gib für $n = 10$, $p = 0,18$, als untere Schranke 3 und als obere Schranke 10 ein.

```
binomCdf(10,0.18,3,10)        0.262801
```



Somit erhältst du die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 10 Würfen mindestens dreimal die Augenzahl 3 geworfen wird, mit ca. 26, 29%.

c) ► **Anzahl n berechnen** (4P)

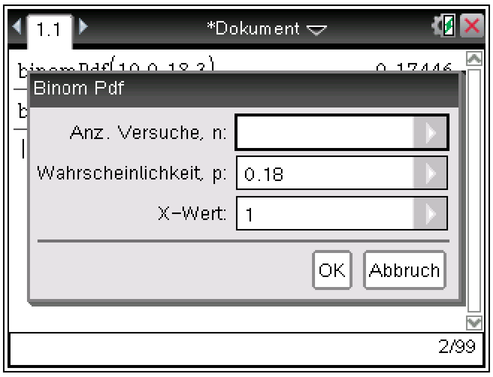
Betrachte die Situation genau: Das Zufallsgerät Q wird geworfen und zwar n Mal. Betrachtet wird das Ereignis, dass die Zahl drei **genau einmal** auftritt. Sei Y die Zufallsgröße, welche die Anzahl der geworfenen Dreien in diesem Versuch beschreibt. Y kann mit der gleichen Begründung wie X oben als binomialverteilt angenommen werden.

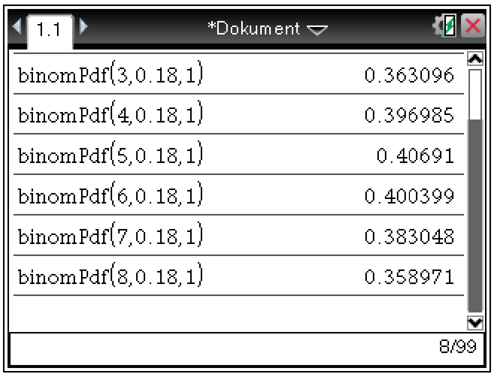
Die Parameter für die Binomialverteilung sind dann $p = 0,18$ und n unbekannt, da die Anzahl der Würfe ja variabel ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Drei genau einmal auftritt, ist die Wahrscheinlichkeit $P(Y = 1)$. Diese Wahrscheinlichkeit soll nun **maximal** werden.

Du kannst so vorgehen:

- Berechne in deinem CAS die Wahrscheinlichkeit $P(Y = 1)$ für verschiedene Werte von n.
- Beobachte, ob sich ein Muster erkennen lässt.

Den Befehl für die Binomialverteilung findest du unter `menu → 5 → 5 → D`. Gib für n systematisch verschiedene Werte, $p = 0,18$ und für $X = 1$ ein.

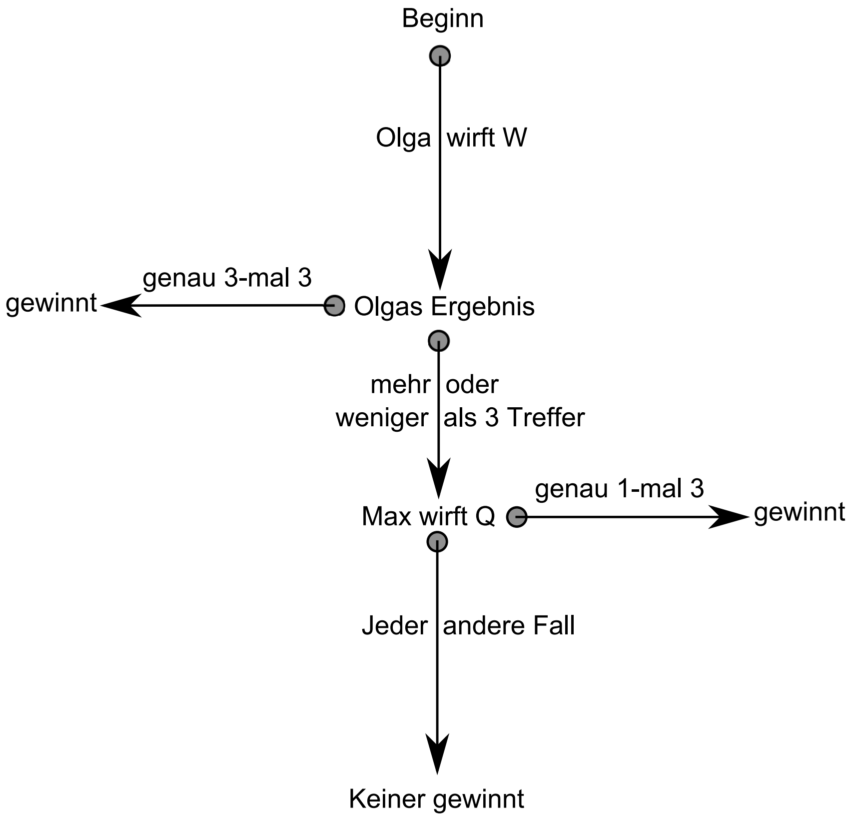




Mit dem CAS erkennst du die maximale Wahrscheinlichkeit bei $n = 5$ mit $P(Y = 1) = 0,40691$.
Damit weißt du: Wenn das Zufallsgerät Q fünfmal geworfen wird, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, genau einmal die Drei zu treffen, maximal.

d) ▶ **Gewinnchancen in Olgas und Max' Spiel** (6P)

Zunächst solltest du dir klar machen, in welcher Reihenfolge das Spiel funktioniert. Dies soll durch die folgende Skizze dargestellt werden. Beachte dabei, dass sowohl Olga als auch Max den Würfel bzw. den Quader je 10 Mal werfen.

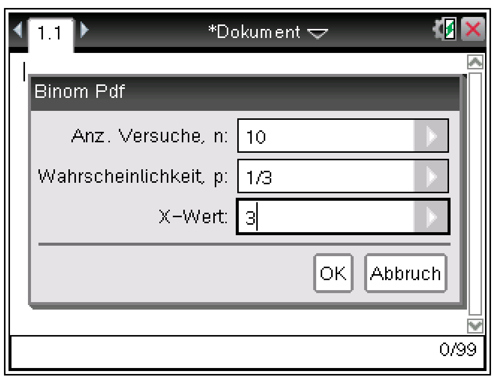


Du kannst also erkennen, dass zunächst Olga verlieren muss, damit Max überhaupt eine Chance auf den Sieg hat. Dabei ist die Aussage, dass Olga verliert äquivalent dazu, dass sie mehr oder weniger als drei Treffer erzielt.

Bestimme also zunächst Olgas Chancen zu gewinnen. Die Gegenwahrscheinlichkeit dazu ist dann gerade die Wahrscheinlichkeit, dass Max überhaupt werfen darf. Dann kannst du die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, dass Max gewinnt.

1. Schritt: Olgas Gewinnchance bestimmen

Damit Olga gewinnt muss sie das Zufallsgerät W werfen und genau dreimal die Augenzahl 3 erzielen. Berechne also $P(X = 3)$ für $n = 10$, $p_w = \dfrac{1}{3}$ und $k = 3$.



Den Befehl für die Binomialverteilung findest du unter `menu → 5 → 5 → D`. Gib für $n = 10$, $p = \frac{1}{3}$ und für $X = 3$ ein.

$\text{binomPdf}\left(10, \frac{1}{3}, 3\right) \qquad 0.260123$

Somit gewinnt Olga also mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,26. Max darf werfen, wenn Olga **nicht** gewinnt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Max werfen darf ist also die Wahrscheinlichkeit des **Gegenereignisses** zu „Olga gewinnt" bzw. zu „X_W ist genau 3".

Die Wahrscheinlichkeit, dass Max überhaupt werfen darf, ist also

$P(X_W \text{ ist nicht genau } 3) = 1 - P(X_W = 3) = 1 - 0,26 = 0,74$

Somit darf Max mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,74$ überhaupt werfen!

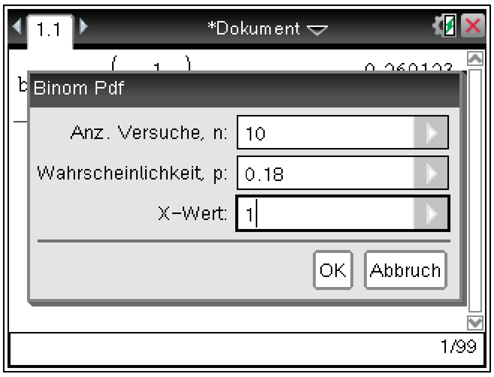
2. Schritt: Wahrscheinlichkeit, dass Max gewinnt, berechnen

Max muss nun, wenn Olga verloren hat, genau einmal die Augenzahl 3 mit dem Zufallsgerät Q werfen, um zu gewinnen.

Berechne also $P(X_Q = 1)$ mit $n = 10$, $k = 1$ und der Wahrscheinlichkeit p_Q, dass eine Drei geworfen wird. Die Wahrscheinlichkeit p_Q hierfür kannst du der Tabelle entnehmen mit $p_Q = 18\,\% = 0,18$.

Den Befehl für die Binomialverteilung findest du unter `menu → 5 → 5 → D`. Gib für $n = 10$, $p = 0,18$ und für $X = 1$ ein.

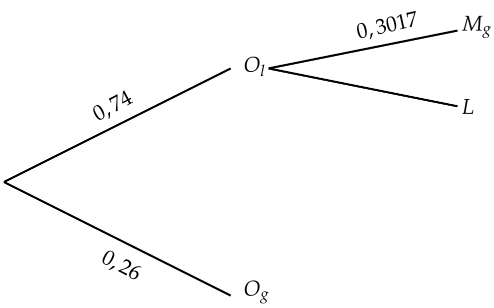
binomPdf(10,0.18,1)	0.301715



Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 30,17 % würfelt Max genau einmal die 3.

Du kannst nun ein Baumdiagramm formulieren, dass die Wahrscheinlichkeiten darstellt. Dabei beschreiben die Abkürzungen folgende Ereignisse:

- O_l: Olga verliert
- O_g: Olga gewinnt
- M_g: Max gewinnt
- L: alle verlieren



Du kannst also die Wahrscheinlichkeit, dass Max gewinnt, über die Pfadregel bestimmen:

$P(\text{Max gewinnt}) = 0,74 \cdot 0,3017 \approx 0,2232 = 22,32\,\%$

Somit hat Max also eine Chance von ca. $22,32\,\%$ das Spiel zu gewinnen.

Von oben weißt du, dass Olga das Spiel mit etwa 26 % Wahrscheinlichkeit gewinnt. Also sind Olgas Gewinnchancen etwas höher als die von Max.

e) ▶ **Begründet entscheiden, welche Wahrscheinlichkeit dargestellt wird** (8P)

Du hast in diesem Fall ein Diagramm gegeben, von dem du auf das verwendete Zufallsgerät schließen sollst. Du kannst zunächst einmal erkennen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl 3 genau zweimal geworfen wird, größer ist, als dass die Augenzahl 3 genau dreimal geworfen wird.

Folglich kannst du herausfinden, welches Zufallsgerät verwendet wurde, indem du diese Wahrscheinlichkeiten bestimmst. Sei dazu X die Zufallsvariable, die die Anzahl der geworfenen Dreien angibt. Diese kannst du als binomialverteilt annehmen mit $k = 2$, bzw. $k = 3$ und $n = 10$.

Folglich benötigst du die Wahrscheinlichkeiten für $X = 3$ und $X = 2$ für $n = 10$ Würfe. Da es sich um dieselbe Ausgangssituation handelt wie bereits zuvor, kannst du X auch weiterhin als binomialverteilt betrachten.

Berechne also für die Zufallsgeräte W und Q die Wahrscheinlichkeiten $P_W(X = 2)$, $P_W(X = 3)$, $P_Q(X = 2)$ und $P_Q(X = 3)$.

Für das Zufallsgerät W gilt, dass alle Augenzahlen mit der relativen Häufigkeit $p_w = \dfrac{1}{3}$ geworfen werden.

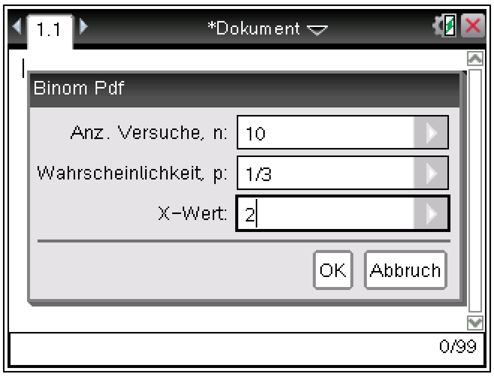
Die relative Häufigkeit, dass die Augenzahl 3 mit dem Zufallsgerät Q geworfen wird, kannst du der Tabelle entnehmen mit $p_q = 18\% = 0,18$.

1. Schritt: $P_W(X = 2)$ und $P_W(X = 3)$ berechnen

Berechne nach der obigen Vorgabe nun die beiden gesuchten Werte.
Dabei ist $p_w = \dfrac{1}{3}$.

Beginne mit dem Wert für $k = 2$.

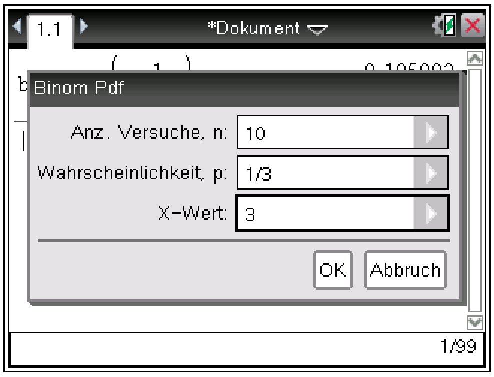
Den Befehl für die Binomialverteilung findest du unter $\boxed{\texttt{menu} \to 5 \to 5 \to \texttt{D}}$. Gib für $n = 10$, $p = \frac{1}{3}$ und für $X = 2$ ein.



$\text{binomPdf}\left(10, \frac{1}{3}, 2\right) \quad 0.195092$

Das CAS liefert: $P(X = 2) = 0,1951$.

Berechne nun die Wahrscheinlichkeit für $k = 3$.



Den Befehl für die Binomialverteilung findest du unter `menu → 5 → 5 → D`. Gib für $n = 10$, $p = \frac{1}{3}$ und für $X = 3$ ein.

$\text{binomPdf}\left(10,\frac{1}{3},3\right)$	0.260123

Das CAS liefert: $P(X = 3) = 0,26$.

Aus den Ergebnissen kannst du die Aussage treffen, dass $P_W(X = 2) < P_W(X = 3)$, weil $0,195 < 0,258$ gilt. Dies widerspricht allerdings der Aussage, die wir zu Beginn getroffen haben. Darin hieß es, dass $P_W(X = 2) > P_W(X = 3)$.

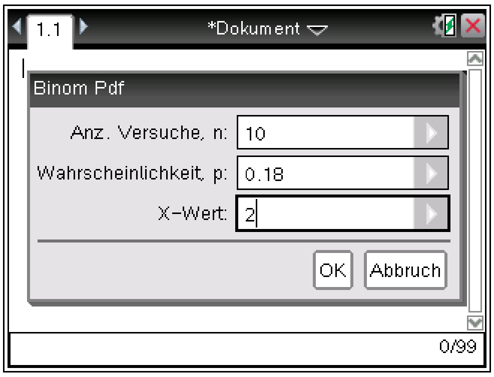
Berechne also die Wahrscheinlichkeiten für das Zufallsgerät Q.

2. Schritt: $P_Q(X = 2)$ und $P_Q(X = 3)$ berechnen

Berechne nach der obigen Vorgabe nun die beiden gesuchten Werte.

Dabei ist $p_q = 0,18$.

Beginne mit dem Wert für $k = 2$.

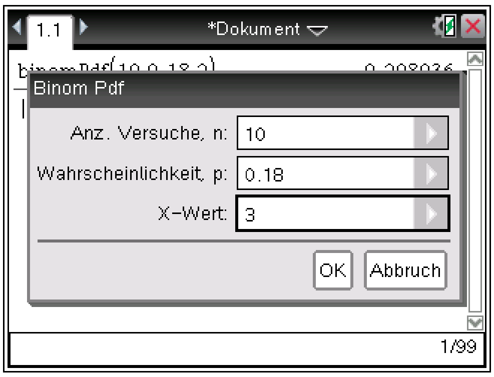


Den Befehl für die Binomialverteilung findest du unter `menu → 5 → 5 → D`. Gib für $n = 10$, $p = 0,18$ und für $X = 2$ ein.

binomPdf(10,0.18,2)	0.298036

Das CAS liefert: $P(X = 2) = 0,2980$.

Berechne nun die Wahrscheinlichkeit für $k = 3$.



Den Befehl für die Binomialverteilung findest du unter `menu → 5 → 5 → D`. Gib für $n = 10$, $p = 0,18$ und für $X = 3$ ein.

binomPdf(10,0.18,3)	0.17446

Das CAS liefert: $P(X = 3) = 0,1745$.

Der Quader Q erfüllt also die Bedingung $P_Q(X = 2) > P_Q(X = 3)$, da $0,298 > 0,1745$. Somit beschreibt das Diagramm die Wahrscheinlichkeiten-Verteilung des Zufallsgeräts Q.

▶ Maßstab der Zeichnung bestimmen

Den Maßstab einer Zeichnung erhältst du, indem du die Länge der Balken l mit dem dargestellten Prozentsatz P vergleichst. Dazu musst du das Verhältnis herausfinden, wieviel Prozent durch einen Zentimeter Balkenlänge dargestellt werden. Folglich erhältst du den Maßstab x, indem du die Wahrscheinlichkeit P durch die Balkenlänge l teilst.

Daraus ergibt sich:

$x = \frac{P}{l}$, wobei x die dargestellte Wahrscheinlichkeit pro Zentimeter ist.

Du benötigst also zunächst die Länge eines Balkens, die du durch Abmessen erhältst. Es ergeben sich die Längen $l_g = 5{,}8\,\text{cm}$ und $l_k = 3{,}4\,\text{cm}$ für den großen und den kleinen Balken. Berechne also das Verhältnis mit den passenden Wahrscheinlichkeiten. Es ergeben sich folgende Beziehungen, die gleich sein müssen.

$$x_1 = \frac{P(X=2)}{l_g} \qquad\qquad x_2 = \frac{P(X=3)}{l_k}$$

Bestimme also diese beiden x_1 und x_2. Diese müssen gleich sein, da der Maßstab für beide Balken gleich sein muss, um eine sinnvolle Darstellung zu erhalten.

$$\begin{aligned} \frac{0{,}289}{5{,}8\,\text{cm}} &= x_1 \\ \frac{0{,}05}{1\,\text{cm}} &\approx x_1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \frac{0{,}1745}{3{,}4\,\text{cm}} &= x_2 \\ \frac{0{,}05}{1\,\text{cm}} &\approx x_2 \end{aligned}$$

Somit stimmen also die beiden Werte x_1 und x_2 mit $x_1 \approx \frac{0{,}05}{1\,\text{cm}} \approx x_2$.

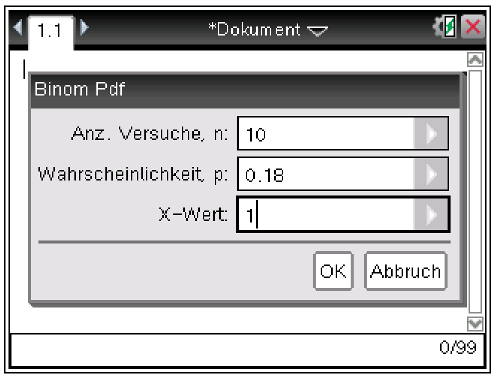
Somit wird eine Wahrscheinlichkeit von 0,05 pro Zentimeter Balkenlänge dargestellt.

▶ Diagramm ergänzen

Da du nun den Maßstab bestimmt hast, kannst du das Diagramm ergänzen, indem du die fehlenden Wahrscheinlichkeiten berechnest und diese dann überträgst. Gesucht sind die Wahrscheinlichkeiten $P(X=1)$ und $P(X=4)$, wobei du X auch weiterhin als binomialverteilt betrachten kannst, mit $n = 10$ und $p = 0{,}18$.

Es ergeben sich die folgenden Rechnungen mit $p = 0{,}18$ und $n = 10$.

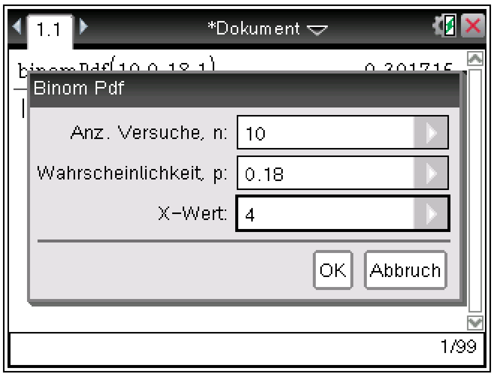
Den Befehl für die Binomialverteilung findest du unter `menu → 5 → 5 → D`. Gib für $n = 10$, $p = 0{,}18$ und für $X = 1$ ein.




```
binomPdf(10,0.18,1)          0.301715
```

$P(X=1) = 0{,}3017$

Berechne zuletzt die Wahrscheinlichkeit $P(X = 4)$. Den Befehl für die Binomialverteilung findest du unter `menu → 5 → 5 → D`. Gib für $n = 10$, $p = 0,18$ und für $X = 4$ ein.



binomPdf(10,0.18,4)	0.067018

$P(X = 4) = 0,067$

Aus dem Verhältnis, das du oben mit $x_1 \approx \dfrac{0,05}{1\,\text{cm}}$ berechnet hast, ergibt sich also:

$$\frac{0,3017}{0,05} \approx 6$$

$$\frac{0,067}{0,05} \approx 1,3$$

Somit muss der Balken für $X = 1$ ca. 6 cm lang werden und der Balken für $X = 4$ ca. 1,3 cm. Es ergibt sich das folgende Bild.