In der Ebene $\mathbb{R}^2$ sei $Z$ ein Punkt mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{x}_z$, und $k$ sei eine positive reelle Zahl. Dann heißt die Abbildung $f$ eine zentrische Streckung mit dem Zentrum $Z$ und dem Streckfaktor $k$, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt: $f(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x}_z = k \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_z)$.

a) Gegeben ist die zentrische Streckung $f_1$ mit dem Zentrum $Z_1\,(3|4)$ und dem Streckfaktor $k_1 = 3$. (15P)

Zeigen Sie, dass die Abbildung $f_1$ durch $f_1(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{x} + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}$ beschrieben wird.

Berechnen Sie bezüglich der Abbildung $f_1$ die Koordinaten der Bildpunkte $A'$ und $B'$ der Punkte $A\,(-1|3)$ und $B\,(4|0)$.

[Zur Kontrolle: $A'\,(-9|1)$, $B'\,(6|-8)$]

Zeichnen Sie die Punkte $A$, $B$, $A'$ und $B'$ in ein geeignetes Koordinatensystem.

Zeigen Sie, dass $Z_1$ der einzige Punkt ist, der durch $f_1$ auf sich selbst abgebildet wird.

b) Untersuchen Sie die Lagebeziehungen der Geraden $g_{AB}$ durch $A$ und $B$ und $g_{A'B'}$ durch $A'$ und $B'$. Berechnen Sie anschließend den Flächeninhalt des Vierecks $A'B'BA$. (15P)

c) Gegeben ist die Gerade $g$ mit der Gleichung $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$. (11P)

Begründen Sie geometrisch, dass diese Gerade durch die Abbildung $f_1$ auf sich selbst abgebildet wird. Weisen Sie dieses auch rechnerisch nach.

d) Gegeben sind die Punkte $P\,(-1|2)$ und $P'\,(-1|6)$. (9P)
Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Geraden $g_{PP'}$ durch $P$ und $P'$ und der Geraden $q: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

Bei einer zentrischen Streckung $f_2$ wird der Punkt $P$ auf den Punkt $P'$ abgebildet, und das Zentrum $Z_2$ liegt auf der Geraden $q$.

Bestimmen Sie die Gleichung von $f_2$ in Matrixform.