a) ► **Wahrscheinlichkeiten berechnen** (16P)

Im Aufgabenteil a) werden Lampen der Firma F_1 betrachtet. Laut Aufgabentext liegt bei dieser Firma eine Ausschussquote von 9 % vor. Da die Lampen der laufenden Produktion entnommen werden, kannst du sagen: Jede der entnommen Lampen ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 9 % unbrauchbar. Da außerdem nur zwischen den beiden Merkmalsausprägungen „unbrauchbar" und „nicht unbrauchbar" unterschieden wird, kann die Anzahl der unbrauchbaren Lampen näherungsweise je durch eine binomialverteilte Zufallsgröße beschrieben werden.

Ereignis A

Der Produktion werden 10 Lampen entnommen. Sei X_1 die Zufallsgröße, welche die Anzahl der unbrauchbaren Lampen in dieser Stichprobe beschreibt. X_1 kann als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 10$ und $p = 0,09$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau eine der Lampen unbrauchbar ist. Dies ist die Wahrscheinlichkeit $P(X_1 = 1)$.

$$\begin{aligned} P(A) = P(X_1 = 1) &= \binom{10}{1} \cdot 0,09^1 \cdot 0,91^9 \\ &= 10 \cdot 0,09 \cdot 0,91^9 \approx 0,3851 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 38,51 % ist genau eine von 10 Lampen unbrauchbar.

Ereignis B

Nun werden der Produktion 20 Lampen entnommen. Sei X_2 die Zufallsgröße, welche die Anzahl der unbrauchbaren Lampen in dieser Stichprobe beschreibt. X_2 kann als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 20$ und $p = 0,09$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 2 der Lampen unbrauchbar sind. Dies ist die Wahrscheinlichkeit $P(X_2 \geq 2)$. Es bietet sich an, die Wahrscheinlichkeit über die des Gegenereignisses zu bestimmen:

$$\begin{aligned} P(B) = P(X_2 \geq 2) &= 1 - P(X_2 \leq 1) \\ &= 1 - (P(X_2 = 0) + P(X_2 = 1)) \\ &= 1 - \left(\left(\binom{20}{0} \cdot 0,09^0 \cdot 0,91^{20}\right) + \left(\binom{20}{1} \cdot 0,09^1 \cdot 0,91^{19}\right)\right) \\ &= 1 - \left(0,91^{20} + 20 \cdot 0,09 \cdot 0,91^{19}\right) \approx 0,5484 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 54,84 % sind mindestens zwei von 20 Lampen unbrauchbar.

Ereignis C

Wieder werden der Produktion 20 Lampen entnommen. Die Anzahl der unbrauchbaren Lampen in der Stichprobe kann also wieder durch X_2 beschrieben werden mit $n = 20$ und $p = 0,09$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weniger als 3 der Lampen unbrauchbar sind. Dies ist die Wahrscheinlichkeit $P(X_2 < 3)$:

$$\begin{aligned} P(C) = P(X_2 < 3) &= P(X_2 \leq 2) \\ &= P(X_2 = 0) + P(X_2 = 1) + P(X_2 = 2) \\ &= \binom{20}{0} \cdot 0,09^0 \cdot 0,91^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0,09^1 \cdot 0,91^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0,09^2 \cdot 0,91^{18} \\ &= 0,91^{20} + 20 \cdot 0,09 \cdot 0,91^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0,09^2 \cdot 0,91^{18} \approx 0,7334 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 73,34 % sind weniger als 3 von 20 Lampen unbrauchbar.

Ereignis D

Zuletzt werden der Produktion 1.100 Lampen entnommen, allerdings wird dieses Mal die Anzahl der funktionstüchtigen Lampen betrachtet. Da 9 % unbrauchbar sind, sind 91 % der Lampen funktionstüchtig. Die Anzahl der funktionstüchtigen Lampen in der Stichprobe kann also durch eine binomialverteilte Zufallsgröße X_3 mit $n = 1.100$ und $p = 0,91$ beschrieben werden. Aufgrund des großen Stichprobenumfangs kann X_3 vermutlich durch eine normalverteilte Zufallsgröße Z angenähert werden. Du kannst also so vorgehen:

- Berechne zunächst den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X_3.
- Untersuche, ob gilt: $\sigma > 3$. Wenn ja, so darf X_3 durch eine normalverteilte Zufallsgröße angenähert werden.
- Berechne mithilfe der Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit $P(971 \leq X_3 \leq 998)$. Denke an die Stetigkeitskorrektur von 0,5.

1. Schritt: Erwartungswert und Standardabweichung berechnen

X_3 ist binomialverteilt mit $n = 1.100$ und $p = 0,91$. Also folgt:

$$\begin{aligned}\mu &= n \cdot p \\ &= 1.100 \cdot 0,91 \\ &= 1.001\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\sigma &= \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \\ &= \sqrt{1.100 \cdot 0,91 \cdot 0,09} \\ &= \sqrt{90,09} \approx 9,49\end{aligned}$$

Da $\sigma = 9,49 > 3$ ist, ist eine Annäherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung zulässig.

2. Schritt: Wahrscheinlichkeit berechnen

Sei Z eine normalverteilte Zufallsgröße mit $\mu = 1.001$ und $\sigma = 9,49$. X_3 kann durch Z angenähert werden:

$$\begin{aligned}P(D) = P(971 \leq X_3 \leq 998) &= P(X_3 \leq 998) - P(X_3 \leq 970) \\ &= P(Z \leq 998) - P(Z \leq 970) \\ &= \Phi\left(\frac{998-\mu+0,5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{970-\mu+0,5}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{998-1.001+0,5}{9,49}\right) - \Phi\left(\frac{970-1.001+0,5}{9,49}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{-2,5}{9,49}\right) - \Phi\left(\frac{-30,5}{9,49}\right) \\ &= \Phi(-0,2634) - \Phi(-3,2139) \qquad \mid \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \\ &= 1 - \Phi(0,2634) - (1 - \Phi(3,2139)) \\ &= 1 - \Phi(0,2634) - 1 + \Phi(3,2139)\end{aligned}$$

In einer Tabelle zur Standardnormalverteilung findest du die Werte:

$\Phi(0,26) = 0,60257$ und $\Phi(3,21) = 0,99934$.

Damit folgt weiter:

$$\begin{aligned}P(D) = P(971 \leq X_3 \leq 998) &= 1 - \Phi(0,2634) - 1 + \Phi\,(3,2139)\\ &= 1 - 0,60257 - 1 + 0,99934\\ &= 0,39677\end{aligned}$$

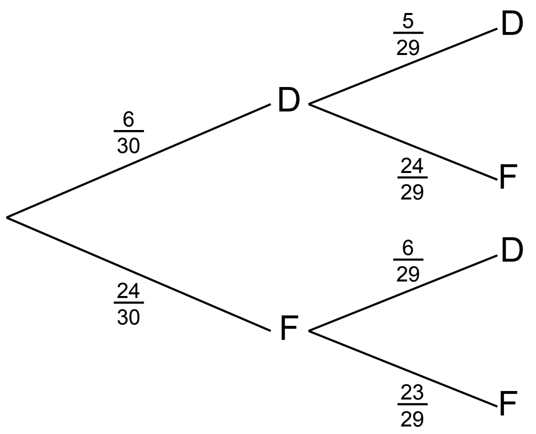
Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 39,68 % sind mindestens 971 und höchstens 998 Lampen funktionstüchtig.

b) ▶ **Wahrscheinlichkeit für die Annahme des Kartons berechnen** (4P)

Es ist bekannt, dass sich im Karton 30 Lampen der Firma F_2 befinden und dass genau 6 dieser Lampen defekt sind. Der Händler entnimmt dem Karton zwei Lampen ohne Zurücklegen. Wenn beide funktionstüchtig sind, dann nimmt er den Karton an.

Die Frage ist also: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler dem Karton zwei funktionstüchtige Lampen entnimmt?

Zu Beginn befinden sich 30 Lampen im Karton, von denen 6 defekt sind. Wenn die erste entnommen ist, dann befinden sich noch 29 Lampen im Karton. Du kannst die Situation in einem Baumdiagramm darstellen. Sei hier D das Ereignis „Eine Lampe ist defekt“ und F das zugehörige Gegenereignis „Eine Lampe ist funktionstüchtig.“:



Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei funktionstüchtige Lampen entnommen werden. Dieses Ereignis ist durch den Pfad $F - F$ dargestellt. Mit der Pfadregel folgt die zugehörige Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{zwei funktionstüchtige Lampen}) = \frac{24}{30} \cdot \frac{23}{29} \approx 0,6345$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 63,45 % nimmt der Händler den Karton mit Lampen an, wenn sechs der 30 Lampen defekt sind.

c) ▶ **Wahrscheinlichkeitsverteilung vervollständigen** (6P)

Betrachte die beiden fehlenden Einträge in der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Sie sind die Wahrscheinlichkeiten zu den Ereignissen $G = -0,98$ und $G = 0,51$. Überlege in einem ersten Schritt, welche Situationen bei den beiden Ereignissen vorliegen, d.h. welche Lampe verkauft wurde und ob sie funktionstüchtig bzw. defekt war. Berechne sodann die zugehörige Wahrscheinlichkeit.

Beachte dabei: Bei einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ergeben die Wahrscheinlichkeiten in der Summe den Wert 1. Es genügt also, wenn du eine der beiden Wahrscheinlichkeiten ausführlich berechnest.

1. Schritt: Eine Wahrscheinlichkeit ausführlich berechnen

Wir beginnen mit dem Ereignis $G = -0,98$. Es tritt ein, wenn eine von F_1 hergestellte Lampe verkauft wird, die Lampe aber defekt ist und der Verkaufspreis zurückerstattet werden muss. Die Wahrscheinlichkeit $P(G = -0,98)$ entspricht also der Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- die Lampe von der Firma F_1 stammt

und

- defekt ist.

Aus dem Aufgabentext weißt du, dass 35 % der Lampen von der Firma F_1 geliefert werden. Also stammt jede Lampe mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,35 von der Firma F_1.

Darüber hinaus weißt du, dass die Ausschussquote der Firma F_1 bei 9 % liegt. Nach der Pfadregel folgt damit für unsere gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$P(F_1 \text{ und defekt}) = 0,35 \cdot 0,09 = 0,0315.$

Also folgt auch: $P(G = -0,98) = 0,0315.$

2. Schritt: Wahrscheinlichkeitsverteilung vervollständigen

Wie oben bereits erwähnt, ergeben die Wahrscheinlichkeiten in der Wahrscheinlichkeitsverteilung in ihrer Summe 1. Bisher liegen die Wahrscheinlichkeiten $0,0455$, $0,0315$ und $0,6045$ vor. Für die Wahrscheinlichkeit $P(G = 0,51)$ muss also gelten:

$P(G = 0,51) = 1 - (0,0455 + 0,0315 + 0,6045) = 1 - 0,6815 = 0,3185$

Damit erhältst du die vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung von G:

g_i	$-1,02$	$-0,98$	$0,47$	$0,51$
$P(G = g_i)$	$0,0455$	$0,0315$	$0,6045$	$0,3185$

▶ Erwartungswert berechnen

Du hast nun die vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung ermittelt. Den Erwartungswert kannst du nun so berechnen:

Seien g_i die die möglichen Werte von G und $P(G = g_i)$ die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten, jeweils für $i = 1, ..., 4$. Für den Erwartungswert $E(G)$ gilt dann:

$$E(G) = \sum_{i=1}^{4} (g_i \cdot P(G = g_i)).$$

In Worten kannst du sagen: Multipliziere jeden möglichen Wert von G mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit und addiere diese Ergebnisse. So ergibt sich:

$$\begin{aligned} E(G) &= (-1,02) \cdot 0,0455 + (-0,98) \cdot 0,0315 + 0,47 \cdot 0,6045 + 0,51 \cdot 0,3185 \\ &= 0,36927 \end{aligned}$$

Der Erwartungswert von G ist $E(G) = 0,36927$. Das bedeutet: Im langfristigen Mittel macht der Discounter pro Lampe einen Gewinn von etwa 37 ct.

d) **▶ Fehler auf stochastische Unabhängigkeit untersuchen** (4P)

Wir definieren zunächst einige Ereignisse:

- Sei L das Ereignis „Eine Lampe hat einen Fehler im Leuchtsystem“,
- sei S das Ereignis „Eine Lampe hat einen Fehler im Schraubmechanismus“,
- seien $\overline{L}$ und $\overline{S}$ die zugehörigen Gegenereignisse.

Das Ereignis: „Es tritt mindestens einer der beiden Fehler auf“ kannst du dann darstellen als $L \cup S$; das Ereignis „Es treten beide Fehler gleichzeitig auf“ entspricht dann $L \cap S$.

Aus der Aufgabenstellung kennst du die Werte:

- $P(S) = 0,02$
- $P(L \cap S) = 0,001$
- $P(L \cup S) = 0,069$

Du sollst nun untersuchen, ob die Fehler unabhängig voneinander auftreten. Dies ist der Fall, wenn die Ereignisse L und S stochastisch unabhängig sind. Die beiden Ereignisse sind stochastisch unabhängig, wenn gilt:

$P(L \cap S) = P(L) \cdot P(S)$.

Du kannst so vorgehen:

- Über eine Vierfeldertafel oder über den Additionssatz kannst du die Wahrscheinlichkeit $P(L)$ berechnen.
- Setze dann $P(L \cap S)$, $P(L)$ und $P(S)$ in die obige Gleichung ein und untersuche, ob sie erfüllt ist.

1. Schritt: $P(L)$ berechnen

Du kannst die Wahrscheinlichkeit $P(L)$ über den Additionssatz (Lösungsweg A) oder über eine Vierfeldertafel (Lösungsweg B) bestimmen.

▶▶ Lösungsweg A: Lösung über den Additionssatz

Der Additionssatz lautet:
$P(L \cup S) = P(L) + P(S) - P(L \cap S)$.
Setze die bekannten Wahrscheinlichkeiten ein und löse nach $P(L)$ auf:

$$\begin{aligned}
P(L \cup S) &= P(L) + P(S) - P(L \cap S) \\
0,069 &= P(L) + 0,02 - 0,001 \\
0,069 &= P(L) + 0,019 \qquad \mid -0,019 \\
0,05 &= P(L)
\end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % hat eine Lampe einen Fehler im Leuchtsystem.

▶▶ Lösungsweg B: Lösung über eine Vierfeldertafel

Überlege, welche der bekannten Wahrscheinlichkeiten man direkt in eine Vierfeldertafel eintragen könnte: Das sind $P(S)$ und $P(S \cap L)$. Um eine Vierfeldertafel vollständig ausfüllen zu können, werden aber mehr als zwei Wahrscheinlichkeiten benötigt.

Du weißt allerdings: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,069 hat eine Lampe **mindestens einen** der beiden Fehler. Das zugehörige Gegenereignis ist: „Ein Lampe hat keinen Fehler im Leuchtsystem und keinen Fehler im Schraubmechanismus“ und kann beschrieben werden als das Ereignis $\overline{L} \cap \overline{S}$. Für seine Wahrscheinlichkeit gilt:

$P(\overline{L} \cap \overline{S}) = 1 - 0,069 = 0,931.$

Damit kennst du drei Wahrscheinlichkeiten, die du in die Vierfeldertafel eintragen kannst. Alternativ bieten auch eine Vierfeldertafel mit **absoluten Werten** an, wobei von 1.000 Lampen ausgegangen wird.

	S	$\overline{S}$	$\sum$
L	$0,001$		
$\overline{L}$		$0,931$	
$\sum$	$0,02$		1

	S	$\overline{S}$	$\sum$
L	1		
$\overline{L}$		931	
$\sum$	20		1.000

Die Einträge der inneren vier Felder müssen in ihrer Summe sowohl zeilen- als auch spaltenweise den Wert im entsprechenden äußeren Feld ergeben. So kannst du die Vierfeldertafel vervollständigen:

	S	$\overline{S}$	$\sum$
L	$0,001$	**0,049**	**0,05**
$\overline{L}$	**0,019**	$0,931$	**0,95**
$\sum$	$0,02$	**0,98**	1

	S	$\overline{S}$	$\sum$
L	1	**49**	**50**
$\overline{L}$	**19**	931	**950**
$\sum$	20	**980**	1.000

Du findest nun den Eintrag $P(L) = 0,05$.

2. Schritt: Stochastische Unabhängigkeit prüfen

Setze $P(L) = 0,05$, $P(S) = 0,02$ und $P(L \cap S) = 0,001$ ein in die Formel von oben:

$$\begin{aligned} P(L \cap S) &= P(L) \cdot P(S) \\ 0,001 &= 0,05 \cdot 0,02 \\ 0,001 &= 0,001 \end{aligned}$$

Die Gleichung ist erfüllt. Also folgt: S und L sind stochastisch unabhängig. Im Sachzusammenhang interpretiert heißt das:

Die Fehler im Leuchtsystem und im Schraubmechanismus der Lampen treten unabhängig voneinander auf.