a) ▶ **Änderungsrate nach 2 Stunden berechnen** (1P)

Die Änderungsrate f der Wassermenge wird laut Aufgabenstellung durch die Funktionsgleichung

$f(x) = 0,2 \cdot x^3 - 2,1 \cdot x^2 + 5 \cdot x$

beschrieben, wobei x die Zeit in Stunden ist und $f(x)$ die Änderung der Wassermenge in Kubikmetern pro Stunde entspricht. Setze daher $x = 2$ in die Funktionsgleichung von f ein und berechne $f(2)$.

▶ **Zeitabschnitte ermitteln, in denen die Wassermenge ab- bzw. zunimmt** (4P)

In der Aufgabenstellung ist eine Funktion f für die Änderungsrate der Wassermenge im Becken in Abhängigkeit der Zeit gegeben. Wenn die Wassermenge zunimmt, nimmt f folglich positive Werte an - es gilt $f(x) > 0$. Nimmt die Wassermenge ab, ist die Änderungsrate negativ, es gilt $f(x) < 0$.

Dem angegebenen Graphen von f kannst du entnehmen, dass die Funktion f zunächst positive Werte, anschließend negative und schließlich wieder positive Werte annimmt. Bestimme nun diese drei Zeitabschnitte:

Die Zeitintervalle sind durch die Zeitpunkte begrenzt, zu denen die Änderungsrate gerade den Wert Null annimmt, wo also

$f(x) = 0$

gilt und zusätzlich durch die Grenzen der Definitionsmenge bei $x = 0$ und $x = 8$.

Dem Graphen kannst du entnehmen, dass es zwei solcher Punkte gibt - es sind gerade die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse. Du kannst diese mit dem GTR ermitteln.

▶ **$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ ohne GTR berechnen** (4P)

Die Aufgabenstellung verlangt, dass das zu berechnende Integral ohne den Einsatz des GTR ausgeführt wird und dass genügend Zwischenschritte angegeben werden, sodass die Lösung nachvollziehbar ist.

Bilde hierzu nach dem Hauptsatz der Integralrechnung eine Stammfunktion von f mit der Faktor- und Summenregel und setze die Integrationsgrenzen in jeweils einem separatem Schritt ein.

▶ **Das Integral und seinen Wert im Sachzusammenhang interpretieren** (2P)

Im Zusammenhang interpretiert ist das Integral über die Änderungsrate der Wassermenge gerade die Wassermenge, die innerhalb eines bestimmten Zeitraums insgesamt hinzugekommen oder abgeflossen ist. Kommt Wasser in einem Zeitraum hinzu, ist der Wert des Integrals positiv. Fließt Wasser ab, ist das Ergebnis negativ. Die Grenzen des Integrals geben dabei an, welcher Zeitraum betrachtet wird.

b) ▶ **Mithilfe der Graphik begründen, dass das Becken nur zu Beobachtungsbeginn leer ist** (3P)

Der dargestellte Graph in der Abbildung stellt die momentane Änderungsrate f der Wassermenge im Becken dar. Zuvor hast du bestimmt, dass die Menge am Anfang zunimmt, dann abnimmt und dann wieder zunimmt bis zum Ende der Beobachtung. Zudem ist in der Aufgabenstellung angegeben, dass das Becken zu Beginn leer ist.

Betrachte die Situation:

Im ersten Zeitabschnitt im Intervall $[0; 3,65]$ fließt nur Wasser hinzu. Das Becken kann in diesem Zeitraum also nicht wieder leer werden.

Im zweiten Zeitraum $[3,65; 6,85]$ fließt hingegen ständig Wasser ab. Es ist also möglich, dass das Becken sich wieder völlig leert und zwar genau dann, wenn in diesem Zeitabschnitt mindestens genauso viel Wasser abfließt, wie im ersten Abschnitt zufließt. Vergleiche deshalb die zu- bzw. abgeflossenen Wassermengen in den beiden Intervallen.

Die Wassermengen, die in den jeweiligen Intervallen insgesamt hinzukommen oder abfließen, lassen sich mithilfe des Integrals der Funktion f für die Änderungsrate über diese Intervalle bestimmen. Diese Integrale können als die **orientierten Flächeninhalte unter dem Funktionsgraphen** von f interpretiert werden. Wir können also die beiden Flächeninhalte abschätzen und vergleichen, anstatt die Integrale zu berechnen.

Um die Flächen abzuschätzen, kannst du dich an den eingezeichneten Kästchen orientieren. Zähle ab, wie viele Kästchen etwa in jede der beiden eingeschlossenen Flächen hineinpassen.

► Den ersten Zeitpunkt bestimmen, zu dem das Becken genau halb voll ist (5P)

Die in der Aufgabenstellung angegebene Funktion f beschreibt die momentane Änderungsrate der Wassermenge im Becken. Demnach ist das unbestimmte Integral von f diejenige Funktion, die die im Becken vorhandene Wassermenge V in Abhängigkeit der Zeit beschreibt:

$$V(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x + C$$

Zudem weißt du, dass das Becken am Anfang leer ist. Daher ist $V(0) = 0$. Da das Integral im Funktionsterm von V für $x = 0$ Null wird, muss auch C den Wert Null annehmen, damit die Aussage stimmt. Daraus folgt:

$$V(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

Nun soll der Zeitpunkt x bestimmt werden, zu dem das Becken erstmals halb voll ist. Dabei sind die Maße des Beckens in der Aufgabenstellung angegeben. Berechne also im ersten Schritt das Volumen des Beckens und schließe daraus anschließend, wie viel Wasser im Becken sein muss, damit dieses halb voll ist.

► Die maximale Wassermenge im Becken im Beobachtungszeitraum bestimmen (4P)

Zuvor hast du die Funktion V bestimmt, die angibt, wie viel Wasser sich im Becken zu einem bestimmten Zeitpunkt x befindet. Finde also das globale Maximum der Funktion V im Intervall $[0; 8]$, um die maximale Wassermenge zu ermitteln, die sich im Beobachtungszeitraum im Becken befindet.

Betrachte dazu

- die lokalen Maxima
- die Randwerte bei $x = 0$ und $x = 8$

c) ▶ **Zeigen, dass h bei $x = 2$ stetig und differenzierbar ist** (5P)

Eine Funktion ist an einer Stelle stetig und differenzierbar, wenn sie dort einen eindeutigen Funktionswert und eine eindeutige Steigung hat. Das heißt, der Graph der Funktion darf an dieser Stelle keinen Sprung und keinen Knick haben.

Bei einer abschnittsweise definierten Funktion ist dies besonders an den Übergangsstellen zwischen den Abschnitten interessant. In unserem Fall ist dies bei $x = 2$. Wenn h an dieser Stelle stetig und differenzierbar ist, dann muss gelten: (6P)

1. $f(2) = g(2)$
2. $f'(2) = g'(2)$

▶ **Wassermenge und Höhe des Wasserstandes nach 8 Stunden ermitteln**

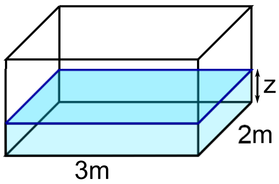
Mit h ist eine neue Funktion für die Änderung der Wassermenge im Becken gegeben. Willst du nun die Wassermenge im Becken nach 8 Stunden berechnen, musst du beachten, dass es sich bei h um eine abschnittsweise definierte Funktion handelt:

Im Intervall $[0;2)$ verhält sich die Wassermenge im Becken nach der Vorschrift von f und im Intervall $[2,8]$ nach der Vorschrift von g. Da diese Funktion die Änderungsrate beschreiben, musst du, um auf den Bestand zu schließen, das Integral anwenden. Du kannst also, um die insgesamt im Becken vorhandene Wassermenge zu erhalten,

- zunächst f im Intervall von $x = 0$ bis $x = 2$ integrieren und dann
- das Integral von g von $x = 2$ bis $x = 8$ hinzu addieren.

Dann erhalten wir zunächst die ins leere Becken zugeflossene Menge Wasser in den ersten beiden Stunden und addieren zu diesem Wert dann die Menge Wasser, die in den darauf folgenden 6 Stunden hinzukommt.

Das Wasser im Becken nimmt ebenso die Form eines Quaders an. Die Grundfläche dieses Quaders ist dabei gleich der Grundfläche des Beckens, die Länge beträgt 3 m und die Breite 2 m. Die Höhe des Quaders z ist die gesuchte Höhe des Wasserstandes. Für das gesamte Volumen des Wassers nach 8 Stunden gilt damit:



$V = (3 \cdot 2 \cdot z)\,\text{m}^3$

Das Volumen des Wassers nach 8 Stunden hast du zuvor bestimmt. Du kannst diesen Wert in die Gleichung einsetzen und nach z auflösen.

d) ▶ **Tangentengleichung für $k = 2,1$ ohne GTR ermitteln** (4P)

Gesucht ist die Funktionsgleichung der Tangente $t_{2,1}$ an den Graphen von $f_{2,1}$ im Punkt $P_{2,1}\,(5 \mid f_{2,1}(5))$. Du kannst die Tangentengleichung auf zwei Arten bestimmen: Entweder mithilfe der allgemeinen Tangentengleichung (**Lösungsweg A**) oder unter Verwendung einer allgemeinen Geradengleichung (**Lösungsweg B**).

▶▶ **Lösungsweg A: Tangentengleichung**

Die allgemeine Tangentengleichung für eine Tangente an den Graphen von $f_{2,1}$ in einem Punkt $P\,(x_0 \mid f_{2,1}(x_0))$ lautet:

$t(x) = f'_{2,1}(x_0)(x - x_0) + f_{2,1}(x_0)$

x_0 ist in unserem Fall gleich 5.

►► Lösungsweg B: Geradengleichung

Allgemein hat die Tangente die Form einer Geraden, das heißt:

$t_{2,1}(x) = m \cdot x + c$

Eine Tangente berührt den Graphen der Funktion in einem Punkt, in unserem Fall $P_{2,1}$. Berühren impliziert dabei zweierlei:

- Die Tangente hat bei $x = 5$ den gleichen Funktionswert wie $f_{2,1}$.
- Die Tangente hat bei $x = 5$ die gleiche Steigung wie die Kurve von $f_{2,1}$

Es gelten also die Bedingungen:

- $f_{2,1}(5) = t_{2,1}(5)$
- $f'_{2,1}(5) = t'_{2,1}(5)$

Mithilfe dieser Bedingungen kannst du nun die Parameter m und c der Tangentengleichung bestimmen.

► Untersuchen, ob sich alle Tangenten t_k in einem gemeinsamen Punkt schneiden (6P)

Wenn sich alle Tangenten t_k in einem Punkt S schneiden, dann schneiden sich bereits zwei Tangenten mit beliebigen $k > 0$ in diesem Punkt. Wir können also den Schnittpunkt zweier beliebiger Tangenten berechnen und anschließend prüfen, ob der Schnittpunkt für alle t_k übereinstimmt.

Gehe wie folgt vor:

- Wähle zwei k, etwa $k = 1$ und $k = 2{,}1$ und berechne den Schnittpunkt S der zugehörigen Tangenten.
- Prüfe durch Einsetzen in $t_k(x)$, ob der Schnittpunkt unabhängig vom Parameter k für alle t_k der gleiche ist.