a) ▶ **Vierfeldertafel vervollständigen** (9P)

In der Aufgabenstellung ist dir eine unvollständige Vierfeldertafel gegeben, die du nun um die fehlenden Einträge ergänzen sollst. Der Vierfeldertafel liegt eine Umfrage vom Umfang $n = 1.200$ zugrunde. Dies ist die **Summe** der insgesamt befragten Personen und tritt deshalb im Feld ganz rechts unten in der Vierfeldertafel auf.

Für die Vierfeldertafel gilt: Die Einträge der inneren vier Felder müssen in ihrer Summe zeilenweise und spaltenweise den Wert der äußeren Felder ergeben. Auch in den äußeren Feldern muss die Summe zeilenweise und spaltenweise den Wert im Feld rechts unten ergeben. Du kannst also mithilfe von Addition uns Subtraktion die fehlenden Einträge berechnen.

Mit $n = 1.200$ ergibt sich die Vierfeldertafel:

	I	G	$\sum$
M	60		
W		520	
Summe	200		**1.200**

Betrachte z.B. die erste Spalte: Bekannt ist der Eintrag 60 und die Summe 200. Der Eintrag im Feld zu $W \cap I$ muss so gewählt werden, dass sich die Spaltensumme 200 ergibt: Der Wert muss also $200 - 60 = 140$ sein.

Berechne auf diese Weise die fehlenden Einträge der Vierfeldertafel:

	I	G	$\sum$
M	60	**480**	**540**
W	**140**	520	**660**
Summe	200	**1.000**	1.200

▶ **Anteil der intensiven Discobesucher unter den weiblichen Discobesuchern bestimmen**

Du benötigst zwei Informationen, um diesen Anteil zu berechnen:

- die Anzahl der weiblichen Discobesucher (W),
- die Anzahl der weiblichen intensiven Discobesucher ($I \cap W$).

Aus der Vierfeldertafel geht hervor:
In der Umfrage gab es 660 weibliche Discobesucher und es gab 140 weibliche intensive Discobesucher.

Gesucht ist der prozentuale Anteil p der weiblichen intensiven Discobesucher an den weiblichen Discobesuchern insgesamt:

$$p\,\% = \frac{140}{660} \cdot 100\,\% \approx 21,21\,\%$$

Der Anteil der intensiven Discobesucher unter den weiblichen Discobesuchern beläuft sich auf etwa 21,21 %.

▶ Anteil der männlichen gelegentlichen Besucher unter allen Discobesuchern bestimmen

Du benötigst wieder zwei Informationen, um diesen Anteil zu berechnen:

- die Anzahl der männlichen gelegentlichen Discobesucher ($G \cap M$),
- die Anzahl aller Discobesucher.

Aus der Vierfeldertafel geht hervor:
In der Umfrage gab es 480 männliche gelegentliche Discobesucher und es gab insgesamt 1.200 Discobesucher.

Gesucht ist der prozentuale Anteil p der männlichen gelegentlichen Discobesucher an allen Discobesuchern insgesamt:

$$p\,\% = \frac{480}{1.200} \cdot 100\,\% \approx 40\,\%$$

Der Anteil der männlichen gelegentlichen Discobesucher unter allen Discobesuchern beläuft sich auf 40 %.

b) **▶ Wahrscheinlichkeit für mehr als 10 intensive Discobesucher berechnen** (9P)

Es werden 100 Discobesucher befragt. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 10 von ihnen angeben, intensive Discobesucher zu sein. Sei X die Zufallsgröße, welche die Anzahl der intensiven Discobesucher in dieser Umfrage beschreibt. X kann als binomialverteilt angenommen werden, denn

- ein Discobesucher ist entweder ein intensiver Discobesucher oder nicht,
- ausgehend von den Ergebnissen der repräsentativen Stichprobe wird angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Discobesucher ein intensiver Discobesucher ist, bei jedem Befragten gleich ist.

Bestimme im ersten Schritt die Parameter n und p der Binomialverteilung und berechne dann die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(X > 10)$.

1. Schritt: Parameter der Binomialverteilung bestimmen

Insgesamt wurden 100 Discobesucher befragt. Also ist $n = 100$. X beschreibt die Anzahl der intensiven Discobesucher unter den Befragten. Betrachte die Vierfeldertafel aus Aufgabenteil a):
Hier wurden insgesamt 1.200 Discobesucher befragt. Unter ihnen gab es genau 200 intensive Discobesucher. Der prozentuale Anteil der intensiven Discobesucher an allen Discobesuchern beläuft sich somit auf:

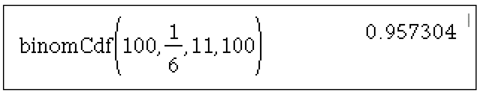
$$\frac{200}{1.200} = \frac{1}{6}$$

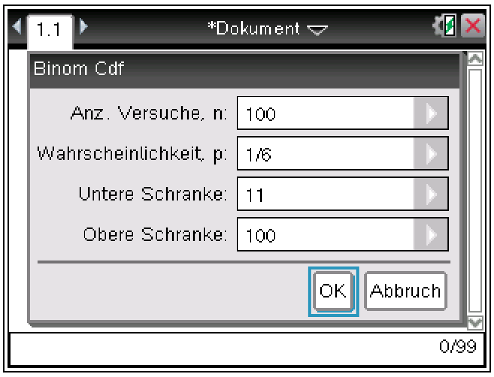
Damit ist X binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = \frac{1}{6}$.

2. Schritt: Gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnen

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 10 von 100 befragten Discobesuchern intensive Discobesucher sind. Dies ist die Wahrscheinlichkeit $P(X > 10) = P(X \geq 11)$.

Den Befehl für summierte Binomialverteilung findest du `menu → 5 → 5 → E`. Gib für $n = 100$, $p = \frac{1}{6}$, für die untere Schranke den Wert 11 und für die obere Schranke den Wert 100 ein.





Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,73 % findet man unter 100 befragten Discobesuchern mehr als 10 intensive Discobesucher.

▶ Anzahl der zu befragenden Discobesucher ermitteln

Sei Y die Zufallsgröße, welche die Anzahl der intensiven Discobesucher beschreibt. Wie X oben kann Y hier als binomialverteilt angenommen werden. Die Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$ hat sich nicht verändert. Allerdings ist dieses Mal der Stichprobenumfang n unbekannt.

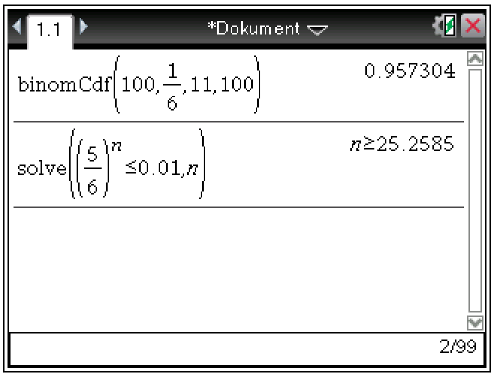
Er soll so bestimmt werden, dass gilt: Mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % findet man mindestens einen intensiven Discobesucher. In Formeln: $P(Y \geq 1) \geq 0,99$.

Vereinfache diese Ungleichung über die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses und löse dann nach n auf:

$$\begin{aligned}
P(Y \geq 1) &\geq 0,99 & \\
1 - P(Y = 0) &\geq 0,99 & \mid -1 \\
-P(Y = 0) &\geq -0,01 & \mid \cdot(-1) \\
P(Y = 0) &\leq 0,01 & (p = \tfrac{1}{6},\ n \text{ unbekannt}) \\
\binom{n}{0} \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(1 - \tfrac{1}{6}\right)^n &\leq 0,01 & \binom{n}{0} = 1;\ \left(\tfrac{1}{6}\right)^0 = 1 \\
\left(1 - \tfrac{1}{6}\right)^n &\leq 0,01 & \\
\left(\tfrac{5}{6}\right)^n &\leq 0,01 &
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung kannst du mit dem `solve`-Befehl lösen. Das Symbol $\leq$ findest du dabei unter `Ctrl → =`.

Das CAS liefert $n \geq 25,26$.



Es müssen mindestens 26 Discobesucher befragt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens ein intensiver Discobesucher darunter ist.

c) ▶ **Wahrscheinlichkeiten berechnen** (8P)

Im Gegensatz zu den Aufgabenteilen a) und b) wird nun eine Gruppe von 12 Schülern betrachtet, von denen genau 3 intensive Discobesucher sind. Die Formulierung „Drei der Schüler [...] werden nacheinander beliebig ausgewählt" weist auf ein **Ziehen ohne Zurücklegen** hin. Die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse A, B und C kannst du über die **Pfadregel** und mithilfe der **hypergeometrischen Verteilung** berechnen.

Ereignis A

Es werden drei der 12 Schüler nacheinander ausgewählt. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nur der erste und der dritte Schüler gelegentliche Discobesucher sind, der zweite muss also ein intensiver Discobesucher sein. Die betrachtete Kombination kannst du darstellen als $G - I - G$.

Zu Beginn gibt es **9 von 12** gelegentliche Discobesucher. Im ersten Zug wird also mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{9}{12}$ einer von ihnen gezogen.
Vor dem zweiten Zug gibt es dann **3 von 11** intensive Discobesucher. Im zweiten Zug wird somit mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{11}$ einer von ihnen gezogen.
Im dritten Zug gibt es schließlich noch **8 von 10** gelegentliche Discobesucher. Im dritten Zug wird mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{8}{10}$ einer von ihnen gezogen.

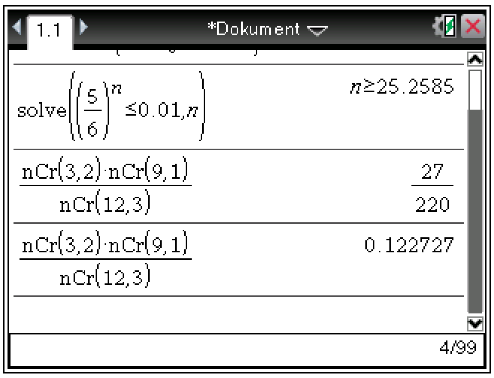
Mit der Pfadregel folgt die Wahrscheinlichkeit
$$P(A) = \frac{9}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{8}{10} = \frac{216}{1.320} \approx 0{,}1636.$$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 16,4 % sind nur der erste und der dritte gelegentliche Discobesucher.

Ereignis B

Nun ist die Wahrscheinlichkeit dafür gesucht, dass genau zwei der drei Discobesucher intensive Discobesucher sind. Beachte, dass **ohne Zurücklegen** gezogen wird. Du kannst die Wahrscheinlichkeit also über die **hypergeometrische Verteilung** berechnen.

Folgende Situation wird betrachtet: Insgesamt gibt es 12 Schüler, von denen 3 ausgewählt werden. 3 dieser Schüler sind intensive Discobesucher. Von ihnen sollen 2 ausgewählt werden. 9 der Schüler sind gelegentliche Discobesucher. Von ihnen soll 1 ausgewählt werden.
Das heißt:

$$P(B) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{9}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{3 \cdot 9}{220} = \frac{27}{220} \approx 0{,}1227$$



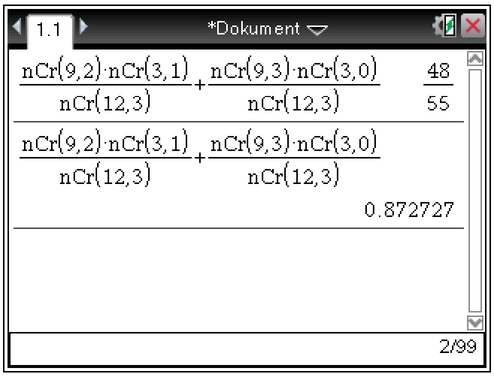
Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 12,3 % werden genau zwei intensive Discobesucher ausgewählt.

Ereignis C

Zuletzt ist die Wahrscheinlichkeit dafür gesucht, dass mindestens zwei der drei Discobesucher gelegentliche Discobesucher sind. Mindestens zwei von drei bedeutet: zwei oder drei der Discobesucher sollen gelegentliche Discobesucher sein.

Insgesamt gibt es unter den 12 Schülern 9 gelegentliche Discobesucher und 3 „nicht-gelegentliche" Discobesucher. Beachte, dass **ohne Zurücklegen** gezogen wird. Du kannst die Wahrscheinlichkeit also über die **hypergeometrische Verteilung** berechnen.

$$P(C) = \frac{\binom{9}{2}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{12}{3}} + \frac{\binom{9}{3}\cdot\binom{3}{0}}{\binom{12}{3}}$$
$$= \frac{36\cdot 3}{220} + \frac{84\cdot 1}{220}$$
$$= \frac{27}{55} + \frac{21}{55} = \frac{48}{55} \approx 0,8727$$



Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 87,3 % werden mindestens zwei gelegentliche Discobesucher ausgewählt.

d) **► Mindestwert für p ermitteln** (4P)

Sei Z die Zufallsgröße, welche die Anzahl der intensiven Discobesucher in der Stichprobe beschreibt. Wie bereits in b) kann die Zufallsgröße Z als binomialverteilt angenommen werden.

Es wird eine Gruppe von 6 Discobesuchern betrachtet. Also ist $n = 6$. Der Anteil der intensiven Discobesucher in zunächst unbekannt und heißt nur p.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 2 intensive Discobesucher in dieser Gruppe zu finden sind, soll mindestens 60 % betragen. In Formeln heißt das: $P(Z \geq 2) \geq 0,6$.

Du sollst nun den Wert bestimmen, den der Anteil p mindestens annehmen muss, damit diese Vorgabe erfüllt wird. Du kannst so vorgehen:

- Bestimme zunächst für $n = 6$ und p unbekannt mithilfe der Binomialverteilung einen Term für die Wahrscheinlichkeit $P(Z \geq 2)$. Dieser Term ist von p abhängig. Du kannst hierbei die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses betrachten.
- Nun soll gelten: $P(Z \geq 2) \geq 0,6$. Für den linken Teil der Ungleichung hast du soeben einen Term ermittelt. Löse diese Ungleichung nach p auf. Du kannst hierzu dein CAS verwenden.

1. Schritt: Term für $P(Z \geq 2)$ bestimmen

$P(Z \geq 2)$ heißt „mindestens 2". Das zugehörige Gegenereignis lautet: „höchstens 1". „Höchstens 1" wiederum umfasst die Ereignisse „Genau 0" und „Genau 1". Damit weißt du:

$$\begin{aligned} P(Z \geq 2) &= 1 - P(Z \leq 1) \\ &= 1 - (P(Z = 0) + P(Z = 1)) \qquad \mid\ n = 6,\quad p \text{ unbekannt} \\ &= 1 - \left(\binom{6}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^6 + \binom{6}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^5 \right) \\ &= 1 - \left(1 \cdot 1 \cdot (1-p)^6 + 6 \cdot p \cdot (1-p)^5\right) \\ &= 1 - \left((1-p)^6 + 6p \cdot (1-p)^5\right) \end{aligned}$$

2. Schritt: Ungleichung nach p auflösen

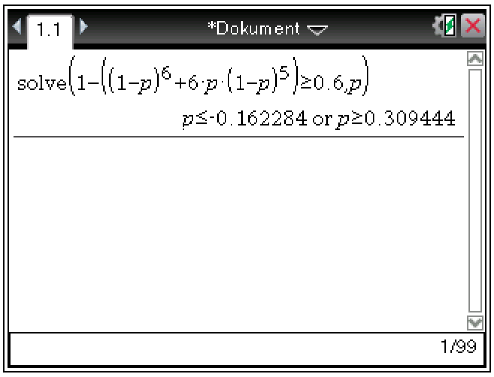
Die Vorgabe $P(Z \geq 2) \geq 0,6$ soll erfüllt sein. Die Wahrscheinlichkeit $P(Z \geq 2)$ hast du soeben durch einen Term ausgedrückt. Dieser Term soll nun einen Wert annehmen, der mindestens $0,6$ ist:

$1 - (1-p)^6 + 6p \cdot (1-p)^5 \geq 0,6.$

Löse diese Ungleichung mit dem `solve`-Befehl.

Das CAS liefert $p \leq -0,16$ und $p \geq 0,31$.

Da p als relativer Anteil der intensiven Discobesucher zwischen 0 und 1 liegen muss, kommt nur die zweite Lösung in Frage.



Der Anteil der intensiven Discobesucher muss auf mindestens 31 % steigen, damit die Vorgabe erfüllt ist.