1.1) (1)

▸ Angeben der Höhe des Faulturms

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass die **Symmetrieachse** eines Faulturms senkrecht zum ebenen waagrechten Gelände verläuft. Der Faulturm wird dabei durch eine Ebene geschnitten, die diese Symmetrieachse enthält. Die dabei entstehende Schnittfläche ist in dem gegebenen Koordinatensystem dargestellt, wobei hier 1 Längeneinheit einem Meter entspricht.
Die **Begrenzungslinie der Schnittfläche** kann hier durch die Graphen der Funktionen f und g, mit

- $f(x) = -\dfrac{1}{1.630} \cdot x^4 - \dfrac{1}{30} \cdot x^2 + 35$ und
- $g(x) = \dfrac{1}{1.630} \cdot x^4 + \dfrac{1}{30} \cdot x^2$ und

beschrieben werden, wobei du der Abbildung entnehmen kannst, dass der Graph von f **oberhalb** des Graphen von g im betrachteten Bereich verläuft.
Deine Aufgabe ist es nun, die **Höhe** des Faulturms zu bestimmen. Da du weißt, dass der Graph der Funktion f **oberhalb des Graphen** von g verläuft, wird die Höhe des Faulturms durch dessen **Schnittpunkt** mit der y-Achse bestimmt.

Den Schnittpunkt des Graphen von f mit der y-Achse ermittelst du hier, indem du den **Funktionswert** von f an der Stelle $x_S = 0$ berechnest. Setze dazu $x_S = 0$ in $f(x)$ ein und berechne wie folgt:

$$f(0) = -\frac{1}{1.630} \cdot 0^4 - \frac{1}{30} \cdot 0^2 + 35 = 35$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen von f mit der y-Achse sind also $S(0\,|\,35)$.
Der Faulturm besitzt folglich eine Höhe von 35 m.

(2)

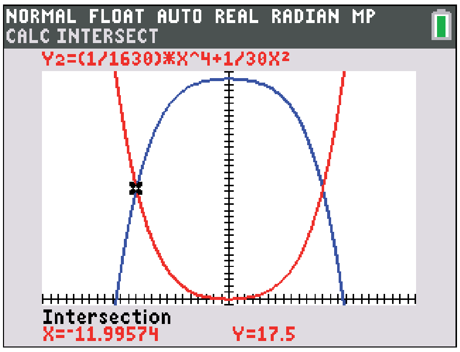
▸ Ermitteln des größten Durchmessers des Faulturms

Nun sollst du den **größten Durchmesser** des Faulturms berechnen. Der gegebenen Abbildung kannst du dazu entnehmen, dass der größte Durchmesser des Faulturms durch die **Schnittpunkte** der Graphen f und g bestimmt wird.
Willst du also den größten Durchmesser des Faulturms bestimmen, so berechnest du hier die Schnittpunkte der Graphen von f und g. Der größte Durchmesser entspricht dann gerade dem **Abstand** zwischen den ermittelten Schnittstellen.

Willst du die Schnittpunkte der Graphen von f und g bestimmen, so verwendest du hier deinen **GTR**. Übertrage dazu die Funktionsterme von f und g in den Y=-Editor und lasse dir die Graphen über GRAPH vom GTR darstellen. Hier berechnest du dann über

`2nd → CALC → 5:intersect`

die Schnittpunkte von der Graphen von f und g.



Die Graphen f und g schneiden sich also in den Punkten $S_1(-12\,|\,17,5)$ und $S_2(12\,|\,17,5)$. Der maximale Durchmesser des Faulturms ist also $|-12|+|12|=24\,\text{m}$.

1.2)

▶ Berechnen des Inhalts der dargestellten Schnittfläche des Faulturms

Hier ist es deine Aufgabe den **Flächeninhalt** der dargestellten Schnittfläche zu berechnen. Da die Begrenzungslinie hier durch die Graphen der Funktionen f und g dargestellt wird, berechnest du den Inhalt hier über ein **Integral**.
Betrachtest du die gegebene Abbildung genauer, so kannst du erkennen, dass sowohl über f als auch über g **integriert** werden muss, um den hier gesuchten Flächeninhalt zu berechnen. Da der Graph von f im gesamt betrachteten Intervall **oberhalb** des Graphen von g verläuft, ergibt sich der Flächeninhalt A über folgendes Integral:

$$A=\int_{x_u}^{x_o}(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$$

Da der Abstand zwischen den Schnittpunkten von f und g dem größten Durchmesser des Faulturms entspricht, legen diese **die Grenzen** des hier zu betrachtenden Integrals fest. Hier gilt also $x_u=-12$ und $x_o=12$
Willst du den Flächeninhalt A hier bestimmen, so benutzt du wieder deinen GTR.

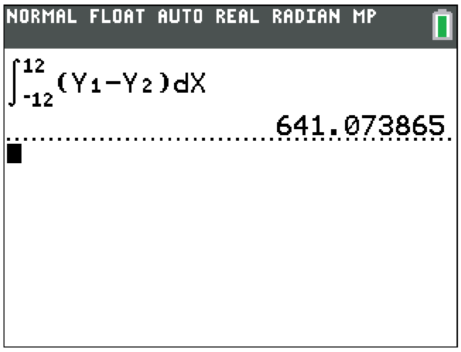
Lege auch hier wieder die Funktionsterme von f und g im Y=-Editor fest, hier wurde $f(x)$ unter Y1 und $g(x)$ unter Y2 festgelegt. Wechsle dann in den `Calculator`-Modus, und füge hier über

`MATH → 9: fnInt`

ein Integral ein. Greife dann über

`VARS → Y-Vars → 1:Function`

auf Y1 und Y2 zu und berechne den Flächeninhalt wie im Schaubild unten dargestellt.



Der Flächeninhalt der hier betrachteten Schnittfläche beträgt also ungefähr $641,07\,\text{m}^2$.

1.3) (1)

▶ Zeigen, dass die Gerade einen Anstieg von 1,44 hat

Nun kannst du der Aufgabenstellung entnehmen, dass um den Faulturm herum eine begehbare Plattform errichtet werden soll. Der Aufgang zu dieser Plattform verläuft dabei **geradlinig** vom ebenen Gelände zum Punkt $B(-7,3\,|\,f(-7,3))$ und liegt auf der Geraden k. Weiterhin geht der Aufgang **tangential**, das heißt **ohne Knick**, im Punkt B in die **Begrenzungslinie der Schnittfläche** des Faulturms über.
Deine Aufgabe ist es, zu zeigen, dass die Gerade k näherungsweise den Anstieg 1,44 besitzt.
Da die Gerade k im Punkt B **tangential, also ohne Knick**, in die Begrenzungslinie der Schnittfläche übergehen soll, muss diese im Punkt B die **gleiche Steigung** wie die Begrenzungslinie besitzen. Da die Koordinaten von Punkt B über die Funktion f definiert werden, betrachtest du hier Funktion f.
Zeige also, dass f im Punkt B eine Steigung von $1,44$ besitzt, um diese Aufgabe hier zu lösen. Da die erste Ableitung einer Funktion zu jeder Stelle die Steigung angibt, gilt es hier die **erste Ableitung** von f zu betrachteten.
Gehe beim Lösen der Aufgabe also so vor:

- 1. Schritt: Bestimmen der ersten Ableitungsfunktion von f
- 2. Schritt: Bestimmen der Steigung von f im Punkt B

1. Schritt: Bestimmen der ersten Ableitungsfunktion von f

Die erste Ableitungsfunktion von f bestimmst du hier über die Faktorregel:
$f'(x) = -4 \cdot \frac{1}{1.630} \cdot x^3 - 2 \cdot \frac{1}{30} \cdot x = -\frac{2}{815} \cdot x^3 - \frac{1}{15} \cdot x$

2. Schritt: Bestimmen der Steigung von f im Punkt B

Setze nun $x_B = -7,3$ in $f'(x)$ ein, um die Steigung von f im Punkt B zu bestimmen:
$f'(-7,3) = -\frac{2}{815} \cdot (-7,3)^3 - \frac{1}{15} \cdot (-7,3) \approx 1,44$
Somit hast du also gezeigt, dass der Anstieg der Geraden k näherungsweise 1,44 ist.

(2)

▶ Bestimmen des Neigungswinkels zum ebenen Gelände

Nun sollst du den Neigungswinkel des Aufgangs zum ebenen Gelände bestimmen. Dieser **Neigungswinkel** entspricht dabei dem Winkel, unter welchem die Gerade k die x-Achse **schneidet**.

Der **Schnittwinkel** α zwischen der x-Achse und einer beliebigen Gerade lässt sich dabei über folgenden Ansatz berechnen:

$$\boxed{\alpha = \tan^{-1}(m)}$$

Dabei entspricht m der Steigung der betrachteten Geraden. Beachte dabei, dass du im vorherigen Aufgabenteil gezeigt hast, dass die Gerade k **einen Anstieg von 1,44** besitzt.

Setze also $m = 1,44$ in den gegebenen Ansatz ein, um den hier gesuchten Neigungswinkel zu berechnen:

$\alpha = \tan^{-1}(1,44) \approx 55,22^\circ$

Der Neigungswinkel zwischen dem Aufgang und dem ebenen Gelände ist also 55,22°.

(3)

▶ Bestimmen der Länge des Aufgangs

Zuletzt sollst du hier noch die Länge des beschriebenen Aufgangs berechnen. Bevor du diese Länge jedoch berechnen kannst, musst du zunächst wissen, in welchem Punkt A auf dem ebenen Gelände **der Aufgang beginnt**. Dieser Punkt liegt zwangsläufig auf der x-Achse.
Aus den Aufgabenteilen zuvor und der Aufgabenstellung weißt du, dass der Aufgang **auf** der Geraden k liegt. Willst du also Punkt A bestimmen, so musst du jenen Punkt berechnen in welchem Gerade k die x-Achse **schneidet**.
Hast du Punkt A bestimmt, so kannst du über den folgenden Ansatz den **Abstand** d zwischen den Punkte A und B berechnen:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \text{ mit } A(x_A \mid y_A) \text{ und } B(x_B \mid y_B)}$$

Willst du diese Aufgabe lösen, dann gehe so vor:

- Bestimme die **Geradengleichung** von Gerade k. Verwende dazu $m = 1,44$ und die Information, dass k durch den Punkt B verläuft.
- Berechne den **Schnittpunkt** von k und der x-Achse.
- Ermittle über die gegebene Formel den **Abstand** zwischen A und B.

1. Schritt: Bestimmen die Geradengleichung von *k*

Bevor du die Geradengleichung von k bestimmen kannst, musst du zunächst die vollständigen Koordinaten von Punkt B bestimmen. Setze dazu $x = -7,3$ in $f(x)$ ein:

$f(-7,3) = -\dfrac{1}{1.630} \cdot (-7,3)^4 - \dfrac{1}{30} \cdot (-7,3)^2 + 35 = 31,48.$

Setzt du nun $m = 1,44$ in die allgemeine Form einer Geraden ein, so ergibt sich $k(x)$ zunächst zu:

$k(x) = 1,44 \cdot x + b.$

Bestimme nun über eine Punktprobe mit $B(-7,3 \mid 31,48)$ den y-Achsenabschnitt b der Geraden k:

$$\begin{aligned} k(-7,3) &= 1,44 \cdot (-7,3) + b \\ 31,48 &= -10,512 + b \qquad \mid +10,512 \\ 42 &= b \end{aligned}$$

Die Geradengleichung von k ergibt sich also zu: $k(x) = 1,44 \cdot x + 42$.

2. Schritt: Berechnen des Schnittpunkts von k mit der x-Achse

Setze $k(x)$ gleich Null, um den Schnittpunkt von k mit der x-Achse zu berechnen:

$$\begin{aligned} k(x) &= 0 \\ 0 &= 1,44 \cdot x + 42 && \mid -42 \\ -42 &= 1,44 \cdot x && \mid : 1,44 \\ x_A &= -29,167 \end{aligned}$$

Gerade k schneidet also die x-Achse im Punkt $A(-29,167 \mid 0)$.

3. Schritt: Berechnen der Länge des Aufgangs

Setze nun $A(-29,167 \mid 0)$ und $B(-7,3 \mid 31,48)$ in den oben gegebenen Ansatz ein, um den Abstand d bzw. die Länge des Treppenaufgangs zu berechnen:

$d = \sqrt{(-29,167 - (-7,3))^2 + (0 - 31,48)^2} = \sqrt{478,17 + 991} \approx 38,33\,\text{m}$.

Die Länge des Aufgangs ist also 38,33 m.

1.4)

▶ Berechnen der Kosten für die Anfertigung der Bodenfläche

Der Aufgabenstellung kannst du nun entnehmen, dass die Bodenfläche der begehbaren Plattform die Form eines **Kreisrings** haben soll, wobei der innere Kreis des **Kreisrings** am Faulturm anliegen soll und den Punkt B enthalten soll. Die Bodenfläche besitzt eine Breite von 1 m. Für die Anfertigung der Bodenfläche werden 175 € pro Quadratmeter **ohne Mehrwertsteuer** veranschlagt.
Deine Aufgabe ist es nun, die Kosten für die Anfertigung der Bodenfläche **zuzüglich** 19 % Mehrwertsteuer zu berechnen.
Der Flächeninhalt eines Kreisrings berechnet sich dabei über folgende **Formel**:

$A_{Kr} = \pi \cdot (r_A^2 - r_I^2)$ mit:

- r_A: Radius des äußeren Rings
- r_I: Radius des inneren Rings

Bevor du also die Kosten für die Anfertigung berechnen kannst, musst du zunächst den Flächeninhalt A_{Kr} berechnen. Dazu benötigst du den **äußeren und inneren Radius des Kreisrings**. Beachte dazu die Angabe, dass Punkt B auf dem inneren Ring des Kreisrings liegt. Mit dieser Angabe kannst du den inneren Radius r_I des Kreisrings berechnen.
Den äußeren Radius berechnest du dann über die Angabe, dass die Breite der Bodenfläche 1,00 m betragen soll. Hast du den Flächeninhalt des Kreisrings bestimmt, so berechne zunächst die Kosten ohne Mehrwertsteuer über **ein Produkt**, um dann im Anschluss mit Hilfe der **Prozentrechnung** die Kosten **mit Mehrwertsteuer** zu berechnen.

Von oben weißt du, dass die y-Achse hier als Symmetrieachse fungiert. Daraus kannst du ableiten, dass der Betrag der x-Koordinate von B gerade dem Radius r_I des inneren Kreisrings entsprechen muss. Es gilt also $r_I = 7,3$. Folglich gilt für den äußeren Kreisring: $r_A = 7,3 + 1 = 8,3\,\text{m}$.
Der Flächeninhalt des Kreisrings A_{Kr} ergibt sich also zu:

$A_{Kr} = \pi \cdot (8,3^2 - 7,3^2) = 49,01\,\text{m}^2$

Die Kosten ohne Mehrwertsteuer ergeben sich nun über das Produkt zwischen A_{Kr} und den 175 € pro m^2:

Kosten ohne MwSt.$= 175\,\frac{€}{\text{m}^2} \cdot 49,01\,\text{m}^2 = 8.576,55\,€$.

Die Mehrwertsteuer beträgt immer 119 % des ursprünglichen Preises. Multipliziere also die Kosten ohne MwSt. mit 1,19 um die Kosten mit MwSt. zu berechnen:

Kosten mit MwSt.$= 8.576,55\,€ \cdot 1,19 = 10.206,10\,€$.

Die Kosten für die Bodenplatte der Plattform belaufen sich also auf 10.206,10 € inklusive Mehrwertsteuer.

1.5) (1)

▸ Angeben der Werte von a und c

Der Aufgabenstellung kannst du hier entnehmen, dass der Klärschlamm mit Hilfe von Bakterien zersetzt wird. Die Anzahl der im Klärschlamm vorhandenen Bakterien kann dabei in Abhängigkeit der Zeit t (in Tagen) über die Funktion h mit

$$h(t) = c \cdot a^t \text{ mit } t \geq 0 \text{ sowie } a > 1 \text{ und } c > 1$$

beschrieben werden. Deine Aufgabe ist es dazu, die Werte von a und c zu bestimmen.
Da es hier **zwei** Parameterwerte zu bestimmen gilt, benötigst du insgesamt **2 Angaben**, über welche du diese Parameter dann bestimmen kannst.
Die **erste Angabe**, die du dazu in der Aufgabenstellung findest, ist, dass zu Begin der Faulzeit, also bei $t = 0$ 10^7 Bakterien im Faulturm **vorhanden** sind.
Die zweite Angabe verrät dir, dass die Anzahl der Bakterien innerhalb eines Tages **um das 1,75-fache** ansteigt. Zum Anfang des zweiten Tages, also bei $t = 1$ befinden sich insgesamt $1,75 \cdot 10^7$ Bakterien im Klärschlamm.
Verwende diese Angaben nun, um die Werte für a und c zu bestimmen.

Die erste Angabe gibt dir an, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ insgesamt 10^7 Bakterien sich im Klärschlamm befinden. Setzt du dies nun in $h(t)$ ein, so erhältst du den Wert für c:

$$\begin{aligned} h(0) &= \text{c} \cdot \text{a}^0 \\ 10^7 &= \text{c} \cdot 1 \end{aligned}$$

Es gilt also für c: $\text{c} = 10^7$.

Den Wert für a berechnest du nun, indem du $\text{c} = 10^7$ sowie $t = 1$ und $h(1) = 1,75 \cdot 10^7$ in $h(t)$ einsetzt und nach a auflöst:

$$\begin{aligned} h(1) &= 10^7 \cdot \text{a}^1 \\ 1,75 \cdot 10^7 &= 10^7 \cdot \text{a} \quad &&|: 10^7 \\ 1,75 &= \text{a} \end{aligned}$$

Die gesuchten Werte für a und c sind also: $\text{c} = 10^7$ und $\text{a} = 1,75$.

(2)

▸ Berechnen der Anzahl der Bakterien am Ende der Faulzeit

Nun sollst du die Anzahl der Bakterien **am Ende der Faulzeit** berechnen. Der Aufgabenstellung kannst du dazu entnehmen, dass die Faulzeit für den Klärschlamm **insgesamt 21 Tage** beträgt.
Setze also $t = 21$ in $h(t)$ ein, um die Anzahl der Bakterien **am Ende der Faulzeit** zu berechnen.

Hier ergibt sich also:

$h(21) = 10^7 \cdot 1,75^{21} = 1,27 \cdot 10^{12}$

Am Ende der Faulzeit befinden sich also $1,27 \cdot 10^{12}$ Bakterien im Klärschlamm.

1.6)

▶ Berechnen der Anzahl der zu erwartenden überladenen LKWs

Der verfaulte Klärschlamm des Faulturms wird mit LKWs entsorgt. Nach der Beladung dieser LKWs erfolgt eine Kontrolle auf Überladung, wobei die Auswahl der LKWs **zufällig** erfolgt. Dabei sind **erfahrungsgemäß 15 %** der LKWs überladen.
Deine Aufgabe ist es nun, die Anzahl der LKWs mit Überladung zu bestimmen, die unter 60 kontrollierten LKWs **im Mittel zu erwarten** sind.
Betrachte dazu die Zufallsvariable X. Diese Zufallsvariable X beschreibt dabei **alle überladenen LKWs** in der hier betrachteten Stichprobe im Umfang von $n = 60$. Fasse hier den Erfahrungswert von 15 % als **Wahrscheinlichkeit** dafür auf, dass ein LKW überladen ist. Da die Wahrscheinlichkeit **konstant** und Zufallsvariable X **nur die zwei Ausprägungen**

- LKW ist überladen oder
- LKW ist nicht überladen

kennt, kann diese als **binomialverteilt** angesehen werden. X ist also mit $n = 60$ und $p = 0,15$ binomialverteilt.
Die Anzahl der LKWs mit Überladung, die unter den 60 kontrollierten LKWs im Mittel zu erwarten sind, entspricht dem **Erwartungswert** der Zufallsvariable X.

Der Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariablen ergibt sich aus dem Produkt des Stichprobenumfangs n mit der Wahrscheinlichkeit p:

$E(X) = n \cdot p = 60 \cdot 0,15 = 9$

Im Mittel sind insgesamt 9 überladene LKWs zu erwarten.

1.7)

▶ Berechnen der Mindestanzahl der zu kontrollierenden LKWs

Nun sollst du die **Mindestanzahl** der zu kontrollierenden LKWs berechnen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit **von mindestens 90 %** mindestens **ein** kontrollierter LKW überladen ist.
Betrachte hierzu die Zufallsvariable Y. Zufallsvariable Y beschreibt auch hier wieder die **Anzahl der überladenen aber kontrollierten LKWs**. Mit gleicher Begründung wie oben ist Y **binomialverteilt**, mit $p = 0,15$, jedoch mit **unbekanntem** Stichprobenumfang n.
Diesen gilt es hier so zu bestimmen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, einen überladenen LKW zu kontrollieren, **mindestens 90 %** beträgt. In Formeln ausgedrückt bedeutet das hier:

$$P(Y \geq 1) \geq 0,9$$

Löse diese Ungleichung nun nach dem Stichprobenumfang n, indem du das **Gegenereignis und den Ansatz zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit einer binomialverteilten Zufallsvariable** verwendest:

$$\boxed{P(Y = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}}$$

Bilde zunächst das Gegenereignis von $P(Y \geq 1)$, um die Ungleichung mit Hilfe des oben gezeigten Ansatzes weiter vereinfachen zu können. Die Ungleichung solltest du dann so gelöst haben:

$$\begin{array}{rcll}
P(Y \geq 1) & \geq & 0,9 & \\
1 - P(Y < 1) & \geq & 0,9 & \mid -1 \\
-P(Y = 0) & \geq & -0,1 & \mid : (-1) \\
\binom{n}{0} \cdot 0,15^0 (1 - 0,15)^{n-0} & \leq & 0,1 & \\
1 \cdot 1 \cdot 0,85^n & \leq & 0,1 & \mid \ln(\,) \\
n \cdot \ln(0,85) & \leq & \ln(0,1) & \mid : \ln(0,85) \ (\text{Achtung! } \ln(0,85) < 0) \\
n & \geq & \dfrac{\ln(0,1)}{\ln(0,85)} & \\
n & \geq & 14,17 &
\end{array}$$

Es sind mindestens 15 LKWs zu untersuchen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % mindestens ein überladener LKW überprüft wird.