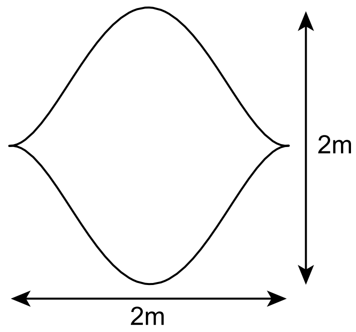
Das Designerbüro PolyNom hat einem Kunden die nebenstehende Abbildung als Entwurf für ein Firmenlogo vorgelegt.
Der obere Rand des Logos soll durch eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$, $a \neq 0$, beschrieben werden. Der untere Rand des Logos soll durch eine Funktion g beschrieben werden, deren Graph durch Spiegelung des Graphen von f an der x-Achse entsteht.
Die Graphen von f und g sind in dem Koordinatensystem der Anlage 1 dargestellt.



a) ► **Symmetrie des Graphen begründen** (11P)

Du sollst anhand des Funktionsterms begründen, dass der Graph von f symmetrisch zur y-Achse ist.

Sieh dir dazu den Funktionsterm von f einmal genau an. Es fällt auf, dass nur gerade Exponenten vorkommen. Kommen in einem Funktionsterm nur gerade Exponenten vor, so ist der zugehörige Graph achsensymmetrisch zur y-Achse.

Der Funktionsterm von f enthält nur gerade Exponenten, daher ist der Graph von f symmetrisch zur y-Achse.

Alternativ kannst du die Symmetrie auch rechnerisch begründen:
Für einen Graphen der Funktion g, der symmetrisch zur y-Achse ist, muss gelten:
Für alle $x \in \mathbb{R} : g(-x) = g(x)$.
Prüfe dies für f:
$f(-x) = a \cdot (-x)^4 + b \cdot (-x)^2 + c = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = f(x)$

Also gilt $f(-x) = f(x)$.
Der Graph von f ist symmetrisch zur y-Achse, weil für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(-x) = f(x)$.

► **Funktionsgleichung von f aufstellen**

Du sollst eine Funktionsgleichung von f aufstellen und hast die Informationen gegeben, dass die Steigung des Graphen von f in den beiden Punkten A und B jeweils den Wert Null haben soll. Aus der Anlage kannst du die Koordinaten zweier Punkte ablesen.
Zusätzlich weißt du, dass f folgende Form haben soll: $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$. Du musst also die Koeffizienten a, b, c berechnen. Dies kannst du tun, indem du mit Hilfe der Informationen, die dir gegeben sind, ein Gleichungssystem aufstellst, welches du anschließend mit dem GTR lösen kannst.

1. Schritt: Gleichungssystem aufstellen

Aus der Anlage kannst du ablesen, dass für f gilt: $f(1) = 0$ und $f(0) = 1$.
Setzt du dies in die Funktionsgleichung von f ein, so erhältst du zwei Gleichungen:
$I) \quad 1 = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^2 + c = 0 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c$
$II) \quad 0 = a \cdot 1^4 + b \cdot 1^2 + c = 1 \cdot a + a \cdot b + 1 \cdot c.$

Nun weißt du aus der Aufgabenstellung auch, dass die Steigung des Graphen von f in den Punkten A und B Null sein soll. Die Steigung des Graphen einer Funktion f wird durch die erste Ableitung f' von f beschrieben. Du weißt demnach, dass gelten soll: $f'(1) = 0$. Daraus kannst du eine dritte Gleichung aufstellen, indem du zuerst die Ableitung f' bildest, und dann $f'(1) = 0$ in die Funktionsgleichung von f' einsetzt.

Die erste Ableitung von f lautet:

$f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 2 \cdot b \cdot x$

Du erhältst dann die Gleichung:

$III) \quad 0 = 4 \cdot a \cdot 1^3 + 2 \cdot b \cdot 1 = 4 \cdot a + 2 \cdot b + 0 \cdot c$

Aus den drei Gleichungen ergibt sich nun ein Lineares Gleichungssystem, mit den drei Unbekannten a, b und c:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & 1 & = & 0a & + & 0b & + & 1c \\ \text{II} & 0 & = & 1a & + & 1b & + & 1c \\ \text{III} & 0 & = & 4a & + & 2b & + & 0c \end{array}$$

2. Schritt: Gleichungssystem lösen

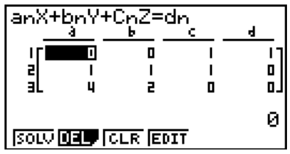
Du kannst das Gleichungssystem nun im `EQUA`-Menü deines GTR lösen. Wähle dazu $\boxed{\texttt{F1 : Lineares Gleichungssystem} \rightarrow \texttt{F2: 3}}$ und gib dort nun die Koeffizienten ein. Bestätigst du zum Schluss mit `EXE`, so erhältst du das Ergebnis:

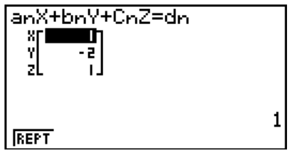
$a = 1, b = -2$ und $c = 1$.

Damit ergibt sich eine Funktionsgleichung von f mit:

$f(x) = x^4 - 2 \cdot x^2 + 1$.

Eine Gleichung der Funktion f lautet $f(x) = x^4 - 2 \cdot x^2 + 1$.





► Funktionsgleichung von g aufstellen

Nun sollst du eine Gleichung der Funktion g aufstellen. Du weißt, dass der Graph von g durch Spiegelung des Graphen von f an der x-Achse entsteht.

Das bedeutet, für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $g(x) = -f(x)$. Dies kannst du dir gut, an der Darstellung aus der Anlage verdeutlichen. Mit Hilfe dessen kannst du nun eine Funktionsgleichung von g aufstellen:

$g(x) = -f(x) = -(x^4 - 2 \cdot x^2 + 1) = -x^4 + 2 \cdot x^2 - 1$.

Eine Gleichung der Funktion g lautet $g(x) = -x^4 + 2 \cdot x^2 - 1$.

b) **► Materialkosten berechnen** (10P)

Du sollst überprüfen, ob die Forderung eingehalten werden kann, dass die Materialkosten für das Logo höchstens 75€ betragen sollen, wenn das Material 34€ je Quadratmeter kostet.

Dazu musst du die gesamten Materialkosten berechnen. Diese erhältst du, indem du den Flächeninhalt A des Logos mit dem preis pro Quadratmeter multiplizierst. Dazu musst du den Flächeninhalt A des Logos berechnen, der dem Inhalt der Fläche entspricht, die von den Graphen der beiden Funktionen f und g eingeschlossen wird. Dies entspricht gleichzeitig der Summe der Inhalte der Flächen A_f, die von dem Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird, und A_g, die von dem Graphen von g und der x-Achse eingeschlossen wird.

1. Schritt: Flächeninhalt berechnen

Da der Graph von g dem an der x-Achse gespiegelten Graphen von f entspricht, gilt: $A_f = A_g$.
Der Inhalt der Fläche A ergibt sich demnach, indem du den Inhalt der Fläche A_f verdoppelst.
Den Inhalt einer Fläche zwischen dem Graphen f und der x-Achse berechnest du über das Integral: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

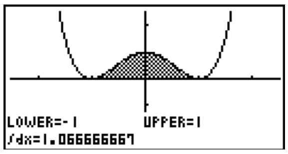
Die Grenzen a und b sind dabei die Nullstellen der Funktion f.

Die Nullstellen des Graphen von f kannst du aus der Anlage ablesen, es sind die x-Koordinaten der Punkte A und B. Im vorigen Aufgabenteil hast du diese bereits verwendet.

Die Nullstellen von f liegen bei $a = -1$ und $b = 1$.

Es gilt also: $A = 2 \cdot \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

Das Integral kannst du berechnen, indem du den Funktionsterm von f im `Graph`-Menü des GTR eingibst und dir den zugehörigen Graphen anzeigen lässt. Wähle dann mit $\boxed{\texttt{F5} \to \texttt{F6} \to \texttt{F3}}$ das Integral aus und gib anschließend die untere ($a = -1$) und die obere Grenze ($b = 1$) ein. Du erhältst dann das Ergebnis:



$A = 2 \cdot \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx 2 \cdot 1{,}067 \approx 2{,}13.$

2. Schritt: Materialkosten berechnen

Für die gesamten Materialkosten des Logos ergibt sich nun mit dem Preis von 34 € pro Quadratmeter:

$A \cdot 34 = 2{,}13\text{m}^2 \cdot 34\frac{€}{\text{m}^2} = 72{,}42.$

Die Gesamtmaterialkosten für das Logo betragen 72,42 €. Demnach wird die erste Forderung erfüllt.

► Größte Steigung des oberen Randes berechnen

Du sollst nun überprüfen, ob die Forderung erfüllt werden kann, dass die größte Steigung des oberen Randes des Logos mindestens 1,5 betragen soll.

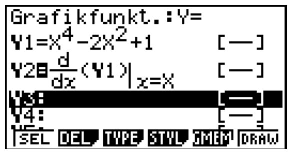
Der obere Rand des Logos wird durch den Graphen der Funktion f dargestellt. Das bedeutet, du sollst überprüfen, ob die maximale Steigung des Graphen von f mindestens 1,5 beträgt. Die Steigung des Graphen von f wird durch die erste Ableitung f' von f beschrieben. Das bedeutet, du sollst überprüfen, ob das Maximum der ersten Ableitung f' von f mindestens 1,5 beträgt.

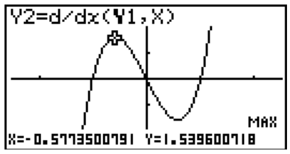
Dies kannst du nun auf zwei Arten tun:

- Lösungsweg A: Berechne das Maximum von f' und vergleiche es mit dem geforderten Wert.
- Lösungsweg B: Berechne die Stelle von f', für die $f'(x) = 1{,}5$ gilt.

►► Lösungsweg A: Maximum berechnen

Um das Maximum der ersten Ableitung f' von f zu bestimmen, bilde zuerst die erste Ableitung von f mit dem GTR.





Den Funktionsterm von f hast du bereits im `Graph`-Menü des GTR eingegeben. Gib nun als zweiten Funktionsterm die Ableitung ein. Den Befehl für „Ableiten“ findest du unter `OPTN → F1`. Gib in die Klammer `Y1` für die erste Funktion f ein. Wähle dazu das `Y`, das dir in der unteren Bildschirmleiste angezeigt wird, mit `F1` aus. Zeichnest du nun den Graphen von f', indem du mit `EXE` bestätigst, kannst du unter `F5: G-Solv → F2: MAX` die Maxima bestimmen.

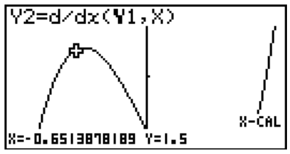
Du erhältst dann die Koordinaten des Maximums mit: $M(-0,58 \mid 1,54)$. Es gilt $1,54 > 1,5$.

Der Funktionswert des Maximums der ersten Ableitung von f ist größer als $1,5$. Damit ist auch die zweite Forderung erfüllt.

►► Lösungsweg B: Stelle mit der Steigung $1,5$ berechnen

Berechne nun die Stelle, für die $f'(x) = 1,5$ gilt, und belege anschließend, dass nach dieser Stelle, die Steigung von f weiter steigt. Dies kannst du auf deinem GTR anhand der Abbildung des Graphen der ersten Ableitung f' von f sehen.

Bilde dazu zuerst die erste Ableitung f' von f mit dem GTR. Den Funktionsterm von f hast du bereits im `Graph`-Menü des GTR eingegeben. Gib nun als zweiten Funktionsterm die Ableitung ein. Den Befehl für „Ableiten“ findest du unter `OPTN → F1`. Gib in die Klammer `Y1` für die erste Funktion f ein.



Wähle dazu das `Y`, das dir in der unteren Bildschirmleiste angezeigt wird, mit `F1` aus. Zeichnest du nun den Graphen von f', indem du mit `EXE` bestätigst, kannst du unter `F5: G-Solv → F6 → F2: X-CAL` die x mit $f'(x) = 1,5$ bestimmen.

Du erhältst dann das Ergebnis: $x =$ und kannst anhand des Graphen in deinem GTR sehen, dass der Graph von f' nach diesem Punkt immernoch ansteigt. Das bedeutet, der Graph von f hat noch höhere Steigungswerte als $1,5$. Damit ist die zweite Forderung ebenfalls erfüllt.

c) **► Geraden in das Koordinatensystem einzeichnen** (13P)

Das Logo soll durch die beiden Geraden $g_1(x) = x$ und $g_2(x) = -x$ in vier Flächenstücke geteilt werden. Du sollst nun die beiden Geraden g_1 und g_2 in das Koordinatensystem in der Anlage zeichnen.

Um eine Gerade in ein Koordinatensystem zu zeichnen, benötigst du zwei Punkte, die auf der Geraden liegen. Durch diese zwei Punkte kannst du dann die Gerade zeichnen. Berechne also zuerst die Koordinaten zweier Punkte, die auf der Gerade g_1 liegen, sowie die Koordinaten zweier Punkte die auf der Geraden g_2 liegen und trage diese anschließend in das Koordinatensystem ein. Zum Schluss kannst du dann die beiden Geraden zeichnen.

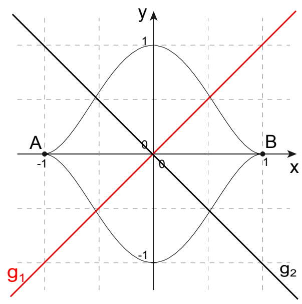
1. Schritt: Koordinaten der Punkte berechnen

Berechne zunächst die Koordinaten zweier Punkte, die auf der Geraden g_1 liegen. Setze dazu zwei verschiedenen x-Werte in die Funktionsgleichung von g_1 ein. Wähle zum Beispiel $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$. Dann erhältst du die Koordinaten der Punkte $C(-1 \mid 1)$ und $D(1 \mid 1)$.

Gehe genauso für die Gerade g_2 vor. Du erhältst die Koordinaten der Punkte $E(-1 \mid 1)$ und $F(1 \mid -1)$.

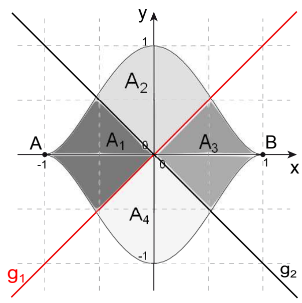
2. Schritt: Punkte und Geraden in das Koordinatensystem eintragen

Trage nun zuerst die Punkte C, D, E und F in das Koordinatensystem ein. Du weißt, dass die Gerade g_1 durch die Punkte C und D verläuft, du kannst sie demnach nun in das Koordinatensystem einzeichnen.
Genauso weißt du, dass die Geraden g_2 durch die Punkte E und F verläuft. Diese kannst du ebenfalls einzeichnen. Damit ergibt sich dann insgesamt das Bild das du rechts sehen kannst.



▶ Größe der Flächenstücke berechnen

Du sollst nun, die Größe der vier Flächenstücke A_1, A_2, A_3 und A_4 berechnen. Du weißt, dass die Graphen f und g symmetrisch zur y-Achse sind und dass der Graph von g durch Spiegelung des Graphen von f an der x-Achse entsteht. Zudem kannst du leicht nachrechnen, dass die Gerade g_1 ebenfalls durch Spiegelung der Geraden g_2 an der x-Achse oder auch an der y-Achse entsteht. Dadurch gilt, dass der Flächeninhalt A_1 genauso groß ist wie der Flächeninhalt A_3. Gleiches gilt auch für A_2 und A_4.



Du brauchst demnach nur zwei Flächeninhalte berechnen und kennst dann alle vier.

A_1 **und** A_3
Berechne zuerst den Inhalt der Fläche A_3 und damit auch den Flächeninhalt A_1.

Die Fläche A_3 setzt sich zusammen aus zwei Teilflächen. Die Teilfläche oberhalb der x-Achse und die Teilfläche unterhalb der x-Achse. Wegen der Symmetrie des Logos, sind diese Teilflächen gleich. Betrachte also zunächst nur die obere Teilfläche und verdopple deren Inhalt anschließend. Die obere Teilfläche kannst du wieder in zwei Teilflächenaufteilen: Die linke Teilfläche A_{g_1}, ist die zwischen der Geraden g_1 und der x-Achse vom Ursprung bis zum Schnittpunkt S_1 von g_1 mit dem Graphen von f. Die rechte Teilfläche A_f ist die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse vom Schnittpunkt S_1 bis zur Nullstelle von f.

Damit gilt dann insgesamt: $A_1 = A_3 = 2 \cdot \left(A_{g_1} + A_f\right)$

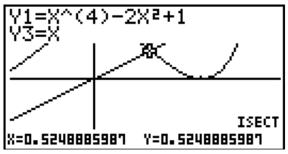
Den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse berechnest du über das Integral: $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Für A_{g_1} gilt dann: $A_{g_1} = \displaystyle\int_0^b g_1(x)\mathrm{d}x$.

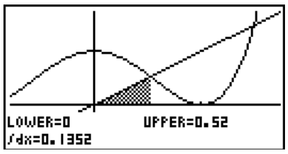
Für A_f gilt: $A_f = \displaystyle\int_b^1 f(x)\mathrm{d}x$, da die Nullstelle von f bei $x = 1$ liegt, wie du aus dem vorigen Aufgabenteil bereits weißt.

b ist die Schnittstelle von f und g_1. Diese musst du zunächst noch berechnen, indem du die Funktionsterme von g_1 und f gleichsetzt.

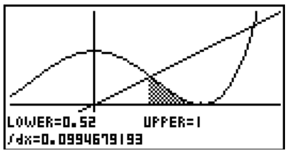
Dies kannst du mit dem GTR tun. Gib dazu beide Funktionsterme im `Graph`-Menü des GTR ein und lass dir die Graphen anzeigen. Unter `F5: G-Solv → F5: ISCT` kannst du nun den Schnittpunkt S_1 bestimmen. Der GTR liefert dir das Ergebnis: $S_1(0,52 \mid 0,52)$.



Damit kennst du nun auch $b = 0,52$. Die beiden Integrale kannst du nun ebenfalls mit dem GTR im `Graph`-Menü berechnen. Unter `F5: G-Solv → F6 → F3` kannst du nun den passenden Graphen auswählen und die untere und anschließend die obere Grenze des Integrals eingeben.



Tust du dies nacheinander für A_{g_1} und A_f erhältst du das Ergebnis:



$$A_1 = A_3 = 2 \cdot \left(A_{g_1} + A_f\right) = 2 \cdot \left(\int_0^{0,52} g_1(x)\mathrm{d}x + \int_{0,52}^{1} f(x)\mathrm{d}x\right) = 2 \cdot (0,1352 + 0,099) \approx 0,47.$$

A_2 und A_4

Berechne nun den Inhalt der Fläche A_2 und damit auch den der A_4. Das Flächenstück A_2 setzt sich ebenfalls aus zwei symmetrischen und damit gleichgroßen Flächenstücken zusammen: Das Teilstück links der y-Achse und das Teilstück rechts der y-Achse. Betrachte demnach zuerst nur das rechte Teilstück der Fläche A_2 und verdopple dessen Inhalt anschließend.

Bei dem Flächenstück rechts der y-Achse handelt es sich um die Fläche zwischen dem Graphen von f und dem Graphen von g_1 vom Ursprung bis zum Schnittpunkt S_1, den du oben bereits berechnet hast.

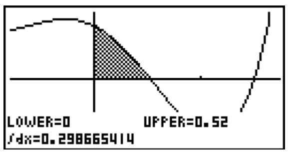
Den Inhalt der Fläche zwischen den beiden Graphen von zwei Funktionen f und g berechnest du über das Integral:

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x.$$

Dabei ist f die Funktion, deren Graph oberhalb und g die Funktion, deren Graph unterhalb verläuft. In diesem Fall sind die Grenzen der Ursprung ($a = 0$) und der Schnittpunkt S_1 ($b = 0,52$).

Damit ergibt sich für $A_2 = 2 \cdot \int_0^{0,52} (f(x) - g_1(x))\mathrm{d}x$. Das Integral kannst du wie oben mit dem GTR berechnen, indem du $f(x) - g(x)$ als neuen Funktionsterm definierst.

Du erhältst dann das Ergebnis: $A_4 = A_2 \approx 2 \cdot 0,30 = 0,60$.



Die Flächenstücke A_1 und A_3 sind jeweils ca. $0,47\ \mathrm{m}^2$ groß. Die Flächenstücke A_2 und A_4 sind jeweils ca. $0,6\ \mathrm{m}^2$ groß.

▶ Geradengleichung bestimmen

Du sollst Funktionsterme der Ursprungsgeraden aufstellen, die durch die Wendepunkte des Graphen von f verlaufen. Eine Ursprungsgerade u durch einen Punkt $P(x_P \mid y_P)$ hat allgemein die Form:

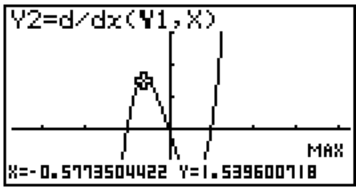
$$u(x) = \frac{y_P}{x_P} \cdot x.$$

Berechne zuerst die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von f und setze diese anschließend in den oben stehenden Funktionsterm ein.

1. Schritt: Wendepunkte bestimmen

Die Koordinaten der Wendepunkte W_1 und W_2 des Graphen von f kannst du mit dem GTR berechnen.

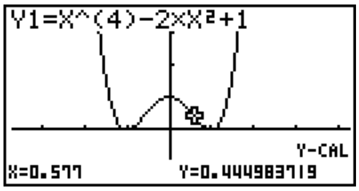
Die Wendepunkte eines Graphen sind die Punkte an denen die Steigung des Graphen maximal bzw. minimal wird. Du suchst hier demnach die Maxima und Minima der ersten Ableitung f'. Berechne diese nun wie oben mit dem GTR.



Du erhältst dann die Ergebnisse:

$W_1: x_1 \approx 0,577$ und $W_2: x_2 \approx -0,577$.

Berechne nun noch die zugehörigen y-Koordinaten, indem du dir den Graphen von f im GTR anzeigen lässt. Wähle dann $\boxed{\texttt{F5(G-Solv)} \rightarrow \texttt{F6} \rightarrow \texttt{F1(Y-CAL)}}$ und gib dort die jeweilige x-Koordinate ein. Dann erhältst du die Ergebnisse:



$W_1(0,577 \mid 0,445)$ und $W_2(-0,577 \mid 0,445)$.

2. Schritt: Geradengleichungen aufstellen.

Du weißt, dass die Geradengleichung durch den Wendepunkt W_1 folgende Form hat:

$u_{W_1}(x) = \frac{y_{W_1}}{x_{W_1}} \cdot x$. Weil der Graph von f symmetrisch zur y-Achse ist, entsteht der Wendepunkt W_2 durch Spiegelgung von W_1 an der y-Achse. Aus den gleichen Gründen wie oben muss dann auch für die Ursprungsgerade durch W_2 gelten: $u_{W_2}(x) = -u_{W_1}(x)$.

Setze dort nun die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von f ein und stelle so die Geradengleichungen auf:

$u_{W_1}(x) = \frac{y_{W_1}}{x_{W_1}} \cdot x = \frac{0,445}{0,577} \cdot x \approx 0,77 \cdot x$,

$u_{W_2}(x) = -u_{W_1}(x) = -0,77 \cdot x$.

Die Gleichungen der Ursprungsgeraden durch die Wendepunkte des Graphen von f lauten :

$u_{W_1}(x) = 0,77 \cdot x$ und $u_{W_2}(x) = -0,77 \cdot x$.

d) ▶ **Abhängigkeit der x-Koordinaten zeigen** (10P)

Du sollst zeigen, dass für jedes k und $x > 0$ die x-Koordinate des Wendepunktes des Graphen von f_k immer dasselbe Vielfache der x-Koordinate des Tiefpunktes ist.

Die Funktionenschar f_k ist dir gegeben mit $f_k(x) = k \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 + 1$.

Berechne zuerst die x-Koordinaten der Tiefpunkte der Graphen von f_k (x_T) und anschließend die Koordinaten der Wendepunkte der Graphen von f_k (x_W).

Für Wendestellen gibt es zwei Kriterien:

- **notwendiges Kriterium:** Die zweite Ableitungsfunktion f_k'' hat bei x_W eine Nullstelle, also gilt $f_k''(x_W) = 0$ für das x_W, an dem sich die Wendestelle befindet.
- **hinreichendes Kriterium:** Die dritte Ableitungsfunktion f_k''' darf in x_W keine Nullstelle haben, also gilt $f'''(x) \neq 0$ für das x_W , an dem sich die Wendestelle befindet.

Genauso gibt es für Minimalstellen zwei Kriterien:

- **notwendiges Kriterium:** Die erste Ableitungsfunktion f_k' hat in x_W eine Nullstelle, also gilt $f_k'(x_T) = 0$ für das x_T, an dem sich die Minimalstelle befindet.
- **hinreichendes Kriterium:** Die zweite Ableitungsfunktion f_k'' darf in x_T keine Nullstelle haben, also gilt $f_k''(x_T) \neq 0$ für das x_T , an dem sich die Minimalstelle befindet.

Zeige anschließend, dass x_W immer dasselbe Vielfache von x_T ist.

Wenn dies der Fall ist, muss für ein konstantes a gelten: $a \cdot x_T = x_W$. Um die Behauptung zu zeigen, berechne also a und zeige so, dass a konstant ist, also nicht von k abhängt.

1. Schritt: x-Koordinaten der Tiefpunkte berechnen

Um die x-Koordinaten der möglichen Tiefpunkte zu berechnen, wende dazu das notwendige Kriterium an. Bilde dazu zuerst die erste Ableitung $f_k'(x)$ von f_k, setze anschließend $f_k'(x) = 0$.

Die erste Ableitung f_k' von f_k kannst du mit Hilfe der Ableitungsregeln bilden:

$f_k'(x) = 4 \cdot k \cdot x^3 - 4 \cdot x$.

Setze den Funktionsterm nun gleich Null und löse nach x auf:

$0 = 4 \cdot k \cdot x^3 - 4 \cdot x = x \cdot (4 \cdot k \cdot x^2 - 4)$.

Mit dem Satz vom Nullprodukt kannst du bereits darauf schließen, dass eine mögliche Lösung $x_1 = 0$ ist. Untersuche nun wann der zweite Faktor 0 wird:

$$\begin{aligned} 0 &= 4 \cdot k \cdot x^2 - 4 && \mid +4 \\ 4 &= k \cdot x^2 && \mid : k \, (k > 0) \\ \tfrac{4}{k} &= x^2 && \mid \sqrt{} \end{aligned}$$

$x_2 = +\sqrt{\frac{4}{4 \cdot k}} = +\sqrt{\frac{1}{k}}$ und $x_3 = -\sqrt{\frac{4}{4 \cdot k}} = -\sqrt{\frac{1}{k}}$.

Du weißt nun, dass die möglichen Tiefpunkte bei $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\frac{1}{k}}$ und $x_3 = -\sqrt{\frac{1}{k}}$ liegen. Zudem ist in der Aufgabenstellung $x > 0$ vorgegeben. Damit bleibt nur noch $x_2 = \sqrt{\frac{1}{k}}$ als gesuchte Minimalstelle übrig. Dir ist auch in der Aufgabenstellung vorgegeben, dass die Graphen von f_k für $x > 0$ einen Tiefpunkt besitzen. Damit musst du das hinreichende Kriterium nun nicht mehr überprüfen, und kennst nun die x-Koordinaten der Tiefpunkte der Graphen von f_k mit $x_T = \sqrt{\frac{1}{k}}$.

2. Schritt: x-Koordinaten der Wendepunkte berechnen

Um die x-Koordinaten der möglichen Wendepunkte der Graphen von f_k zu berechnen, wende zunächst das notwendige Kriterium an. Bilde dazu die zweite Ableitung $f_k''(x)$ von f_k mit Hilfe der Ableitungsregeln, setze anschließend $f_k''(x) = 0$.

$f_k''(x) = 12 \cdot k \cdot x^2 - 4$. Setze nun $f_k''(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= 12\cdot k\cdot x^2 - 4 && \mid +4 \\ 4 &= 12\cdot k\cdot x^2 && \mid :(12\cdot k) \\ \tfrac{1}{3\cdot k} &= x^2 && \mid \sqrt{\ } \\ x_1 &= +\sqrt{\tfrac{1}{3\cdot k}} \\ x_2 &= -\sqrt{\tfrac{1}{3\cdot k}} \end{aligned}$$

Die möglichen Wendepunkte der Graphen von f_k liegen demnach bei $x_1 = +\sqrt{\frac{1}{3\cdot k}}$ und $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3\cdot k}}$. Hier gilt das gleiche wie bei den Minimalstellen. Damit musst du hier ebenfalls nicht das hinreichende Kriterium überprüfen und kennst die x-Koordinate des Wendepunktes der Graphen von f_k mit $x_W = +\sqrt{\frac{1}{3\cdot k}}$ für $x > 0$.

3. Schritt: Vergleichen der x-Koordinaten

Zeige nun, dass $a \cdot x_T = x_W$ für ein konstantes a gilt. Um die Behauptung zu zeigen, berechne also a und zeige so, dass a konstant ist, also nicht von k abhängt.

$$\begin{aligned} a\cdot x_T &= x_W \\ a\cdot\sqrt{\tfrac{1}{k}} &= \sqrt{\tfrac{1}{3\cdot k}} && \mid {}^2 \\ a\cdot\tfrac{1}{\sqrt{k}} &= \tfrac{1}{\sqrt{3\cdot k}} && \mid \cdot\sqrt{k} \\ a &= \tfrac{1}{\sqrt{3\cdot k}}\cdot\sqrt{k} \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Die x-Koordinate des Wendepunkts des Graphen von f_k ist immer das $\frac{1}{\sqrt{3}}$-fache der x-Koordinate des Tiefpunktes des Graphen von f_k für $x > 0$.