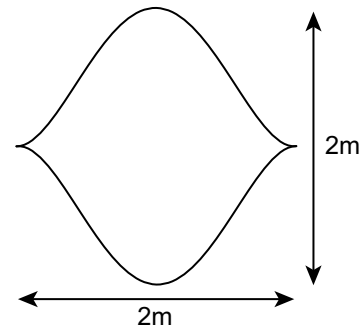


Das Designerbüro PolyNom hat einem Kunden die nebenstehende Abbildung als Entwurf für ein Firmenlogo vorgelegt. Der obere Rand des Logos soll durch eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$, $a \neq 0$, beschrieben werden. Der untere Rand des Logos soll durch eine Funktion g beschrieben werden, deren Graph durch Spiegelung des Graphen von f an der x -Achse entsteht. Die Graphen von f und g sind in dem Koordinatensystem der Anlage 1 dargestellt.



- a) Begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass der Graph der Funktion f symmetrisch zur y -Achse ist. (11P)
- Die Steigung des Graphen von f in den Punkten A und B soll jeweils den Wert null haben. Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion f .

(Kontrollergebnis: $f(x) = x^4 - 2 \cdot x^2 + 1$)

Geben Sie eine Gleichung der Funktion g an.

- b) Der Kunde fordert für das durch f und g beschriebene Logo: (10P)
- Die Materialkosten für ein Logo sollen bei einem Preis von 34€ je Quadratmeter 75€ nicht überschreiten.
 - Die größte Steigung des oberen Randes soll mindestens 1,5 betragen.

Untersuchen Sie für jede Forderung, ob sie erfüllt wird.

- c) Das Logo soll verschiedenfarbig gestaltet werden. Dazu wird es durch die Geraden g_1 und g_2 mit $g_1(x) = x$ und $g_2(x) = -x$ in vier Flächenstücke unterteilt. (13P)
- Zeichnen Sie diese Geraden in das Koordinatensystem der Anlage. Bestimmen Sie die Inhalte der einzelnen Flächenstücke.
- Ein anderer Vorschlag sieht vor, das Logo durch Ursprungsgeraden zu unterteilen, die durch die Wendepunkte von f verlaufen. Bestimmen Sie die Gleichungen dieser Geraden.

- d) Unabhängig vom Sachzusammenhang ist die Funktionenschar f_k gegeben mit (10P)
- $$f_k(x) = k \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 + 1, \quad k > 0.$$
- Ohne Nachweis können Sie verwenden, dass jeder Graph der Schar für $x > 0$ einen Wendepunkt und einen Tiefpunkt besitzt. Zeigen Sie damit, dass für jeden Wert von k mit $k > 0$ die x -Koordinate des Wendepunktes immer dasselbe Vielfache der x -Koordinate des Tiefpunktes ist.

(44P)

Material

Anlage : Graphen zu den Teilaufgaben a), b) und c)

