a) ▶ **G_a auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen untersuchen** (5P)

1. Schritt: Schnittpunkte mit der x-Achse berechnen

Setze $f_a(x) = 0$ und löse die Gleichung nach x auf. So erhältst du die **Nullstellen** von f_a. An diesen Stellen schneidet der Graph G_a die x-Achse.

2. Schritt: Schnittpunkte mit der y-Achse

Der Schnittpunkt von G_a mit der y-Achse hat allgemein die Koordinaten $S_y\left(0 \mid f_a(0)\right)$. Bestimme also $f_a(0)$.

▶ **Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to \pm\infty$ angeben**

Wir betrachten zunächst den Fall für $x \to \infty$ und anschließend den Fall für $x \to -\infty$.

Betrachte im Vorfeld den Funktionsterm von f_a: Die Klammern in den beiden Exponenten $(3-x)$ und $(x-3)$ sind sehr ähnlich. Tatsächlich gilt:
$(3-x) = (-x+3) = -(x+3)$.

Für den Funktionsterm kannst du also schreiben:
$f_a(x) = \mathrm{e}^{a\cdot(x-3)} + \mathrm{e}^{a\cdot(-(x-3))} = \mathrm{e}^{a\cdot(x-3)} + \mathrm{e}^{-a\cdot(x-3)}$

Diese Schreibweise ist hilfreich, vor allem weil der Parameter a wegen $a \neq 0$ sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann. In dieser Schreibweise sind nun aber die Parameter a und $-a$ erhalten. Diese haben einmal ein positives und einmal ein negatives Vorzeichen.

Außerdem gilt: Für große positive Werte von x strebt die e-Funktion gegen Unendlich. Für betragsmäßig große negative Werte von x strebt die e-Funktion gegen Null.

b) ▶ **Gleichen lokalen Extrempunkt der Graphen G_a nachweisen** (10P)

Gesucht sind die Extrempunkte der Graphen G_a, d.h. die **Extremstellen** x_E der Funktionen f_a. Für diese gilt:

- das notwendige Kriterium $f_a'(x_E) = 0$,
- das hinreichende Kriterium $f_a''(x_E) > 0$ für ein **lokales Minimum** und $f_a''(x_E) < 0$ für ein **lokales Maximum**.

Du kannst so vorgehen:

- Bestimme zunächst die ersten beiden Ableitungen von f_a nach der Kettenregel.
- Setze $f_a'(x) = 0$ und löse nach x auf. So erhältst du die potentiellen Extremstellen x_E.
- Bestimme über das hinreichende Kriterium die **Art** der Extremstellen.
- Berechne zuletzt über $f_a(x_E)$ die zugehörige y-Koordinate.
- Die Graphen haben alle den **gleichen** lokalen Extrempunkt, wenn dessen Koordinaten **unabhängig** vom Parameter a sind.

▶ Begründen, dass keine Wendepunkte existieren

Für eine Wendestelle x_W von f_a müsste gelten:

- notwendiges Kriterium $f_a''(x_W) = 0$,
- hinreichendes Kriterium $f_a'''(x_W) \neq 0$.

Der Graph G_a besitzt keine Wendepunkte, wenn die Gleichung $f_a''(x_W) = 0$ keine Lösung besitzt. Untersuche dies.

c) **▶ $G_{0,5}$ zeichnen** (10P)

Bisher wurde allgemein der Graph G_a betrachtet, nun wird $G_{0,5}$ für $a = 0,5$ untersucht. Setze $a = 0,5$ in die Koordinaten des Schnittpunkts mit der y-Achse ein. Dann kennst du bereits die Grenzwerte der Funktionswerte $f_{0,5}(x)$, den Tiefpunkt von $G_{0,5}$ und dessen Schnittpunkt mit der y-Achse.
Darüber hinaus bietet es sich an, im Bereich $[-1\,;\,7]$ eine **Wertetabelle** anzufertigen.

Bestimme also im ersten Schritt die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse und fertige eine Wertetabelle an und zeichne abschließend den Graphen.

▶ Funktionsgleichung der Parabel p bestimmen

Nun wird das Intervall $[0\,;\,6]$ betrachtet. In diesem Intervall soll der Graph G_a durch eine Parabel p angenähert werden. Aus der Aufgabenstellung weißt du, dass p

- im Tiefpunkt $T(3 \mid 2)$,
- an den beiden Randpunkten, d.h. bei $x = 0$ und $x = 6$

mit $G_{0,5}$ identisch ist. Du kannst so vorgehen:

- Berechne zunächst die exakten Koordinaten der beiden Randpunkte.
- Bestimme dann die Funktionsgleichung der Parabel über die Scheitelpunktform $p(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$, wobei der Scheitelpunkt (Tiefpunkt) die Koordinaten $S(x_S \mid y_S)$ besitzt.

d) **▶ Höhe und Winkel der Kettenbefestigung berechnen** (10P)

In diesem Aufgabenteil wird die Funktion $f_{0,2}$ mit $a = 0,2$ betrachtet; ihr Graph ist $G_{0,2}$. Mit diesem Graphen soll die in der Abbildung dargestellte Kette modelliert werden. Der Fußpunkt des linken Pfostens befindet dabei laut Aufgabenstellung im Ursprung $O(0 \mid 0)$. Der **Boden** wird also durch die x-Achse modelliert. Der **linke Pfosten** würde im Koordinatensystem auf der y-Achse liegen.

Gefragt ist, in welcher **Höhe** und unter **welchem Winkel** die Kette am Pfosten befestigt ist. In unserer Modellierung heißt das:

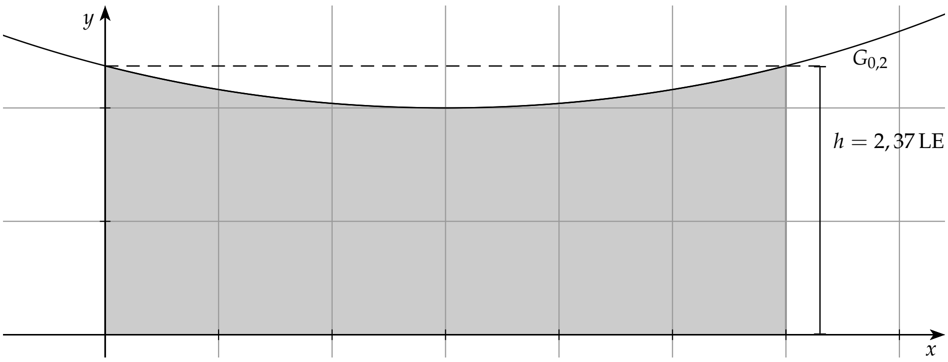
- Der Befestigungspunkt liegt auf der y-Achse mit $x = 0$. Gesucht ist der Punkt, in welchem $G_{0,2}$ die y-Achse schneidet, also S_y.
- Weiterhin ist gefragt, welchen Winkel die Kette ($G_{0,2}$) mit dem Pfosten (y-Achse) einschließt. Diesen Winkel kannst du bestimmen, wenn du den **Steigungswinkel** von $f_{0,2}$ an der Stelle $x = 0$ berechnest.

Du kannst also so vorgehen:

- Bestimme im ersten Schritt die Koordinaten des Schnittpunktes von $G_{0,2}$ mit der y-Achse. Berechne aus dessen y-Koordinate die Höhe, in der die Kette angebracht ist.
- Berechne sodann den Steigungswinkel α von $f_{0,2}$ an der Stelle $x_0 = 0$. Nutze dazu die Beziehung $\tan(\alpha) = m_t$, wobei m_t die Steigung der Tangente an $G_{0,2}$ bei $x = 0$ ist.
- Der Steigungswinkel α ist der Winkel, den der Graph $G_{0,2}$ mit der x-Achse einschließt. Gesucht ist der Winkel β, den der Graph $G_{0,2}$ mit der y-Achse einschließt. Überlege: x-Achse und y-Achse schließen einen rechten Winkel ein. Berechne aus dieser Beziehung Winkel β.

▶ Größe der eingeschlossenen Fläche berechnen

Betrachte die eingeschlossene Fläche zunächst einem Koordinatensystem. Du kannst sie auch in der Abbildung markieren, die du in der Aufgabenstellung gegeben hast.



Bekannt ist:

- Die Fläche wird vom Graphen $G_{0,2}$ und der x-Achse zwischen zwei Grenzen eingeschlossen.
- Die untere Grenze ist $x_U = 0$.
- Über die obere Grenze x_O weißt du, dass die Kette, d.h. $G_{0,2}$ sich an dieser Stelle wieder auf der Ausgangshöhe von 2,37 LE befindet. Es muss also gelten: $f_{0,2}(x_O) = 2,37$. Diese Gleichung ist aber nicht leicht zu lösen. Überlege deshalb, an welcher Stelle sich die obere Grenze befinden könnte und weise diese nach.

Du kannst nun so vorgehen:

- Versuche, aus deiner bisherigen Erfahrung mit der Kettenlinie, eine mögliche obere Grenze x_O zu erraten und weise diese nach.
- Berechne dann den Inhalt der oben grau gefärbten Fläche über den Hauptsatz der Integralrechnung.

e) ► **Symmetrieachse und zwei Punkte einzeichnen** (5P)

Die Symmetrieachse ist eine Parallele zur y-Achse durch den Tiefpunkt des Graphen. Dieser lag bei allen Graphen G_a bei $T\,(3 \mid 2)$. Die Symmetrieachse hat also die Gleichung $x = 3$.

Zusätzlich zur Symmetrieachse sollen zwei Punkte $P_1\,(x_E + t \mid f_{0,5}(x_E + t))$ und $P_2\,(x_E - t \mid f_{0,5}(x_E - t))$ eingezeichnet werden. In unserem Kontext haben sie die Koordinaten $P_1\,(3 + t \mid f_{0,5}(3 + t))$ und $P_2\,(3 - t \mid f_{0,5}(3 - t))$ Überlege zunächst welche Eigenschaft diese beiden Punkte haben:

- Die x-Koordinate $3 + t$ bzw. $3 - t$ bedeutet: P_1 liegt t LE **rechts** von der Symmetrieachse und P_2 liegt t LE **links** von der Symmetrieachse.
- Aufgrund der Achsensymmetrie haben beide Punkte dieselbe y-Koordinate. Sie sind also **Spiegelpunkte** bezüglich der Achse $x = 3$.

Wähle für t einen beliebigen Wert mit $t < 3$, z.B. $t = 1$.

► **Symmetrie nachweisen**

Der Graph einer Funktion f ist achsensymmetrisch zu einer Parallelen zur y-Achse mit der Gleichung $x = a$, falls gilt:

$f(a - x) = f(a + x)$.

In unserem Fall muss also gelten: $f_{0,5}(3 - x) = f_{0,5}(3 + x)$. Zeige durch Einsetzen, dass diese Gleichung stimmt.