Gegeben sind die Funktionen f und g mit den Gleichungen

$f(x) = -x \cdot \mathrm{e}^{-x}; \quad x \in \mathbb{R}$ und $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x; \quad x \in \mathbb{R}$.

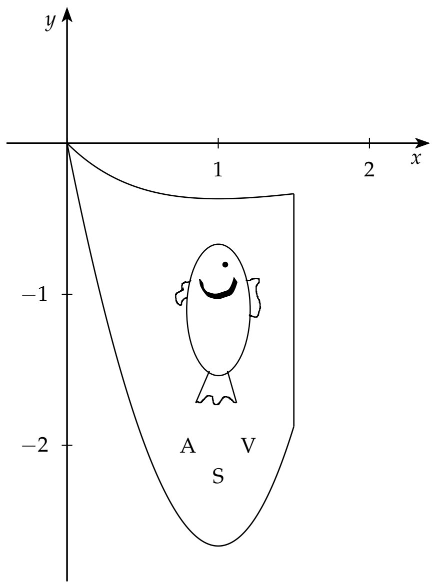
a) Ermitteln Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte des Graphen von g und zeigen Sie, dass einer der Punkte auch zum Graphen von f gehört. (13P)
Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Tangente an die beiden Graphen im Punkt $\mathrm{O}(0|0)$ einschließen.
[Kontrollergebnis: $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot (x-1)$]

b) Zeigen Sie, dass die beiden lokalen Tiefpunkte der Graphen von f und g auf einer gemeinsamen Parallelen zur y-Achse liegen und geben Sie die Koordinaten dieser Tiefpunkte an. (8P)

Hinweis: Auf den Nachweis des Minimum mithilfe eines hinreichenden Kriteriums kann verzichtet werden.

c) Jeder der Graphen von f und g besitzt genau einen Wendepunkt. Diese Wendepunkte sind diagonal gegenüberliegende Eckpunkte eines Rechtecks, das symmetrisch bezüglich der y-Achse liegt. Skizzieren Sie diesen Sachverhalt und ermitteln Sie die Koordinaten aller Eckpunkte des Rechtecks. (10P)

d) Die Fläche, die von den beiden Graphen und der Geraden $x = 1{,}5$ im IV. Quadranten eingeschlossen wird, soll als Vorlage für das Vereinsemblem eines Angelvereins dienen. Weisen Sie nach, dass die Funktion $F : F(x) = (x+1) \cdot \mathrm{e}^{-x}$ eine Stammfunktion von f ist. Berechnen Sie die Größe der Fläche, die für das Emblem vorgesehen ist. (5P)



e) Ein Angelsportfreund schlägt vor, die oberer Begrenzung in Form einer quadratischen Parabel zu gestalten. Diese Parabel soll den gleichen Tiefpunkt und den gleichen Schnittpunkt mit der y-Achse haben wie der Graph von f. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel. (4P)

(40P)