a) **▶ Wahrscheinlichkeit berechnen** (7P)

Hans nimmt zwei CDs nacheinander aus dem Regal und zwar **ohne Zurücklegen**. Die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte CD zu ziehen, ändert sich also von Zug zu Zug. Zu Beginn sind sechs CDs von Padonna, fünf CDs von Nelkenstolz und vier CDs von Tokio Motel im Verkaufsregal. Dies sind insgesamt 15 CDs.

1. Schritt: Ereignis E_1.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_1 : Beide CDs sind von Padonna. Zu Beginn sind **6 von 15** CDs von Padonna. Wenn Hans eine davon gezogen hat, so sind insgesamt noch 14 CDs im Regal und 5 davon sind von Padonna.

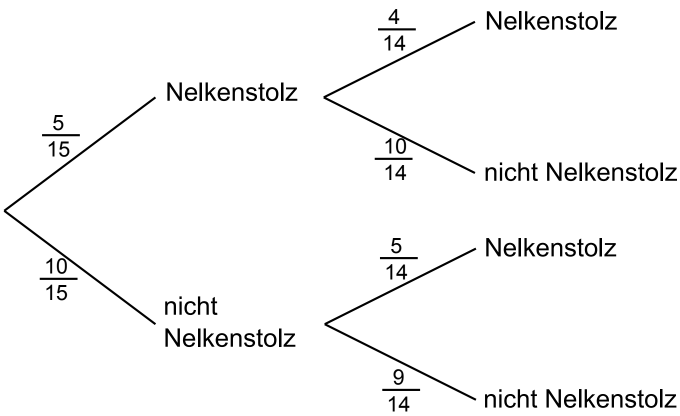
Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste CD von Padonna ist, ist also $\frac{6}{15}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass Hans dann nochmal eine CD von Padonna zieht, ist $\frac{5}{14}$.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die erste **und** die zweite CD von Padonna sind, kannst du mit der Pfadregel berechnen:

$$P(\text{beide CDs von Padonna}) = \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} \approx 0{,}1429.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 14,29 % sind beide CDs von Padonna.

2. Schritt: Ereignis E_2

Nun werden die CDs anders unterschieden: Es interessiert, ob sie von Nelkenstolz sind oder nicht. Zu Beginn sind **5 von 15** CDs von Nelkenstolz, also sind **10 von 15** CDs nicht von Nelkenstolz. Hans zieht wieder zweimal und zwar ohne Zurücklegen. Es bietet sich an, diese Situation in einem zweistufigen Baumdiagramm darzustellen und die Wahrscheinlichkeit dann mit der Pfadregel zu berechnen.



Wie du im Baumdiagramm gut erkennen kannst, kommen zwei Pfade in Frage:

- erst Nelkenstolz und dann Nicht-Nelkenstolz
- erst Nicht-Nelkenstolz dann und Nelkenstolz

Berechne die Wahrscheinlichkeit mit der Pfadregel:

$$\begin{aligned} P(\text{Nelkenstolz und Nicht-Nelkenstolz}) &= \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} + \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} \\ &= \frac{50}{210} + \frac{50}{210} = \frac{100}{210} \approx 0{,}4762 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 47,62 % ist eine CD von Nelkenstolz und die andere CD nicht.

► Festzulegenden Betrag berechnen

Betrachte die Situation: Im Regal befinden sich 15 CDs, von denen 6 von Padonna, 5 von Nelkenstolz und 4 von Tokio Motel sind. Ein Kunde wählt eine dieser CDs zufällig aus, anschließend wird diese CD im Regal wieder ersetzt. Es handelt sich also um ein **Ziehen mit Zurücklegen**.

Die CDs werden zu unterschiedlichen Preisen verkauft. Sei X die Zufallsgröße, welche den Erlös des Verkäufers pro Kunde beschreibt. X kann die Werte 15 (für Padonna), 12 (für Nelkenstolz) und 9 (für Tokio Motel) annehmen. Die CDs sollen nun aber zu einem einheitlichen Preis verkauft werden und zwar so, dass die Einnahmen **langfristig** in gleicher Höhe sind. Berechne also, mit welchem Erlös der Verkäufer langfristig pro Kunde rechnen kann: Diese Zahl entspricht dem Erwartungswert von X. Du kannst nun so vorgehen:

- Erstelle eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für X.
- Berechne den Erwartungswert für X. Dies ist der Erlös, den der Verkäufer langfristig **pro Kunde** erhält.
- Dieser Erwartungswert entspricht genau dem einheitlichen Preis pro CD, den der Verkäufer verlangen muss.

1. Schritt: Wahrscheinlichkeitsverteilung für X erstellen

Da die CDs im Regal wieder ersetzt werden, liegt bei jedem Kunden die gleiche Situation vor. Aufgrund der Anzahlen der CDs im Regal, nämlich 6 von Padonna, 5 von Nelkenstolz und 4 von Tokio Motel, zieht er die unterschiedlichen CDs mit unterschiedlicher Wahrscheinlichkeit:

Er zieht eine CD von Padonna mit Wahrscheinlichkeit $\frac{6}{15}$, die von Nelkenstolz mit $\frac{5}{15}$ und die von Tokio Motel mit $\frac{4}{15}$. Außerdem erhält der Verkäufer für die CDs einen unterschiedlichen Erlös. In einer Tabelle dargestellt ergibt sich:

x_i	15 €	12 €	9 €
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$

2. Schritt: Erwartungswert berechnen

Den Erwartungswert kannst du berechnen, indem du die möglichen Ergebnisse je mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit multiplizierst und diese Produkte addierst:

$$\begin{aligned} E(X) &= 15\,€ \cdot \frac{6}{15} + 12\,€ \cdot \frac{5}{15} + 9\,€ \cdot \frac{4}{15} \\ &= 6\,€ + 4\,€ + 2,40\,€ \\ &= 12,40\,€ \end{aligned}$$

Langfristig macht der Verkäufer also einen Erlös von 12,40 € pro Kunde. Das heißt auch: Er muss die CDs zum einheitlichen Preis von 12,40 € anbieten, damit er langfristig die gleichen Einnahmen erzielt.

b) ▶ **Wahrscheinlichkeiten berechnen** (8P)

Es ist bekannt, dass 10 % aller gekauften CDs einen fehlerhaften Aufdruck besitzen. Diese Wahrscheinlichkeit ist also für jede CD gleich. Insgesamt werden 5 CDs betrachtet. Sei X die Zufallsgröße, welche die Anzahl der fehlerhaften CDs in dieser Stichprobe von 5 CDs beschreibt. X kann unter diesen Umständen als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 5$ und $p = 0,1$.

1. Ereignis E_3

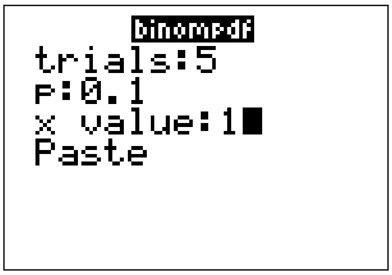
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau eine von 5 CDs einen fehlerhaften Aufdruck hat. Dies ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = 1)$. Du kannst sie von Hand (Lösungsweg A) oder mit dem GTR (Lösungsweg B) berechnen.

▶▶ **Lösungsweg A: Lösung von Hand**

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \binom{5}{1} \cdot (0,1)^1 \cdot (1-0,1)^{5-1} \\ &= 5 \cdot 0,1 \cdot (0,9)^4 \approx 0,32805 \end{aligned}$$

▶▶ **Lösungsweg B: Lösung mit dem GTR**

Den Befehl für „Binomialverteilung“ findest du unter `2nd → VARS (DISTR) → Binompdf`. Gib hier $n = 5$, $p = 0,1$ und $k = 1$ ein und bestätige mit `Enter`.



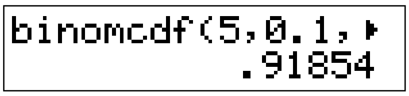
Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 32,81 % hat genau eine von 5 CDs einen fehlerhaften Aufdruck.

2. Ereignis E_4

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 2 von 5 CDs einen fehlerhaften Aufdruck haben. Dies ist die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 2)$. Berechne diese Wahrscheinlichkeit über die Wahrscheinlichkeit des **Gegenereignisses**:

$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$.

Den Befehl für „Kumulierte Binomialverteilung“ findest du unter `2nd → VARS (DISTR) → Binomcdf`. Gib hier $n = 5$, $p = 0,1$ und $k = 1$ ein und bestätige mit `Enter`.



Damit folgt weiter:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - 0,9185 \\ &= 0,0815 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 8,15 % haben mindestens 2 von 5 CDs einen fehlerhaften Aufdruck.

▶ Mindestanzahl an CDs berechnen

Gesucht ist die Anzahl n an CDs, die mindestens gekauft werden muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 75 % mindestens 2 CDs einen fehlerhaften Aufdruck besitzen. Sei X wieder die Zufallsgröße, welche die Anzahl der CDs mit fehlerhaftem Aufdruck beschreibt. X kann dieses Mal als binomialverteilt angenommen werden mit n unbekannt und $p = 0,1$.

Die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 2)$ muss also größer als 75 % werden. Daraus ergibt sich die Ungleichung:

$P(X \geq 2) > 0,75.$

Forme diese Ungleichung zunächst mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses um. Löse sodann die resultierende Ungleichung mithilfe der Wertetabelle des GTR.

1. Schritt: Ungleichung umformen

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &> 0,75 & \\ 1 - P(X \leq 1) &> 0,75 & \quad | -1 \\ -P(X \leq 1) &> -0,25 & \quad | \cdot(-1) \\ P(X \leq 1) &< 0,25 & \end{aligned}$$

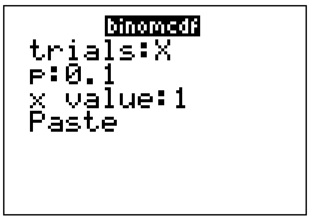
2. Schritt: Ungleichung lösen

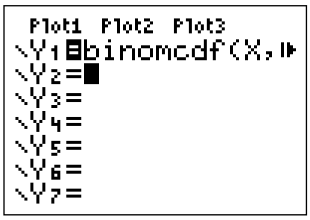
X ist binomialverteilt mit $p = 0,1$ und n unbekannt. Du kannst die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 1)$ mit dem GTR also so darstellen:

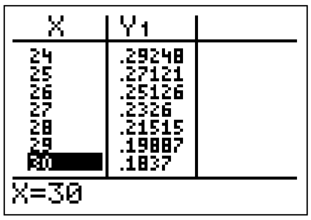
`binomcdf(X,0.1,1)`

Gesucht ist der kleinste ganzzahlige Wert für X, für den diese Wahrscheinlichkeit erstmals kleiner als 0,25 ist. Du kannst also so vorgehen:

- Gib über `2nd → VARS (DISTR)` den Ausdruck `binomcdf(X,0.1,1)` als Funktionsterm in den GTR ein.
- Öffne mit `2nd → GRAPH (TABLE)` die Wertetabelle.
- Suche nach dem Wert für X (d.h. für n), für den sich ein Wert ergibt, der erstmals kleiner als 0,25 ist.







Du findest die Werte:

Für $n = 25$: $P(X \leq 1) = 0,27121 > 0,25$

Für $n = 26$: $P(X \leq 1) = 0,25126 > 0,25$

Für $n = 27$: $P(X \leq 1) = 0,2326 < 0,25$

Damit folgt $n = 27$ und es gilt:

Es müssen mindestens 27 CDs gekauft werden, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 75 % 2 oder mehr CDs mit fehlerhaftem Aufdruck erhält.