Phototrophe Bakterien brauchen Licht für ihren Stoffwechsel. Sie bevölkern daher die oberflächennahen Wasserschichten.
Wenn man wenige solcher Bakterien in ein entsprechend belichtetes Wasserbecken einsetzt, so beginnen sie sich zu vermehren.
Mit steigendem Bestand machen die Bakterien das Wasser weniger durchsichtig, sodass schließlich die Wachstumsrate (oder Wachstumsgeschwindigkeit) zurück geht.
Die Wachstumsrate in Anzahl pro Liter und Minute wird durch die Funktionen f_k mit
$f_k(t) = t \cdot \mathrm{e}^{-kt},\ k \in \mathbb{R}^+,\ t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben; t bezeichnet dabei die Zeit in Minuten, unterschiedliche Faktoren beeinflussen die Zeitkonstante k.

a) Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_E des stärksten Wachstums und die Wachstumsrate zu diesem Zeitpunkt. (8P)

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f_k. (5P)
Geben Sie die Bedeutung dieses Punktes im Kontext der Aufgabe an.

c) Bestimmen Sie durch Integration die Stammfunktion F_k von f_k. (7P)

(Zur Kontrolle: $F_k(t) = \dfrac{(-kt-1)\cdot \mathrm{e}^{-kt}}{k^2} + C$)

Berechnen Sie C so, dass gilt: $F_k(t) = \dfrac{1+k^2-(1+kt)\mathrm{e}^{-kt}}{k^2}$ mit $F_k(0) = 1$.
Beschreiben Sie die Bedeutung der Funktionenschar F_k im Sachkontext.

d) Zeichnen Sie $f_{0,5}$ und $F_{0,5}$ im Bereich $0 \leq t \leq 10$. Beschreiben Sie durch 4 Aussagen den Einfluss des Parameters k auf das Aussehen der Graphen von f_k und F_k. (7P)

e) Begründen Sie, dass für jedes k die Funktionswerte $F_k(t)$ gegen eine endliche Zahl streben, wenn t gegen Unendlich strebt. (3P)
Bestimmen Sie diese Zahl in Abhängigkeit von k und geben Sie die Bedeutung dieses Wertes im Kontext der Aufgabe an.