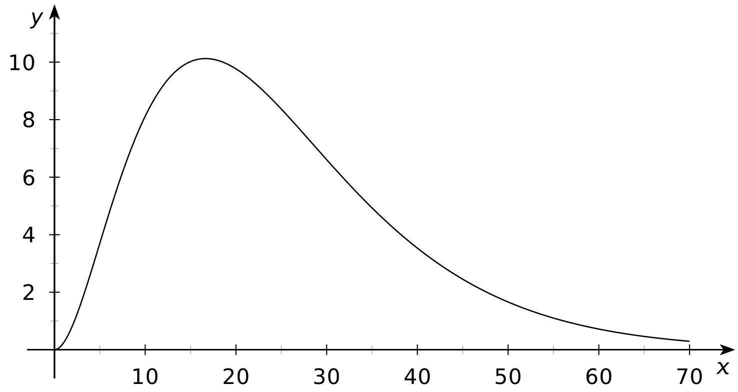
Aufgabe I 3

a) **Skizze des Schaubildes von f** (5VP)

Das Schaubild von f ergibt sich mit dem GTR:

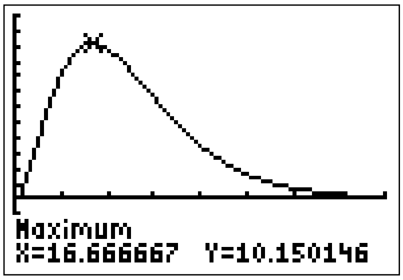


Bestimmung der größten Anzahl an Besuchern pro Minute

Die größte Anzahl an Besuchern ist durch das **Maximum** von f gegeben.

Mit dem GTR kann dieses über den Befehl 2nd → TRACE (CALC) → 4: maximum bestimmt werden. Es ergibt sich das Maximum $10,2$ an der Stelle $x \approx 16,7$.

Nach $16,7$ Minuten, also etwa um 19.17 Uhr ist die Ankuftsrate mit etwa 10 Personen pro Minute maximal.

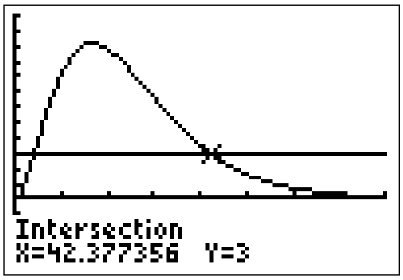


Zeitpunkt, ab dem weniger als drei Personen pro Minute ankommen

Es können hier lediglich die Stellen berechnet werden, an denen die Ankuftsrate **genau** drei Personen pro Minute beträgt.

Mit dem GTR lassen sich diese Stellen berechnen, indem f mit der Geraden $y = 3$ über den Befehl 2nd → TRACE (CALC) → 5: intersect geschnitten wird. Es ergeben sich die beiden Schnittstellen $x_1 \approx 4,3$ und $x_2 \approx 42,4$.

Wie am Schaubild von f allerdings erkennbar, dass erst zum zweiten Zeitpunkt hin die Ankuftsrate auch tatsächlich dauerhaft unter 3 Personen pro Minute bleibt, somit ist x_2 die gesuchte Stelle.



Etwa ab 19.43 Uhr kommen weniger als drei Besucher pro Minute zum Kino.

b) **Nachweis, dass die Anzahl der Ankömmlinge durch g beschrieben wird** (4VP)

Die Funktion f beschreibt die Anzahl der ankommenden Personen **pro Minute** und stellt damit eine **Änderungsrate** da.

Ihre Stammfunktion müsste somit richtige Anzahl der ankommenden Personen pro Minute beschreiben – was ja genau durch g beschrieben werden soll. Es muss also gezeigt werden, dass g eine Stammfunktion von f ist. Dies ist der Fall, wenn $g'(x) = f(x)$ gilt.

Um dies zu überprüfen, wird g nach der Produktregel abgeleitet. Dabei ist zu beachten, dass der Term $e^{-0,12x}$ nach der Kettenregel abgeleitet zu $\left(e^{-0,12x}\right)' = e^{-0,12x} \cdot (-0,12)$ wird:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 - \left[(4,5x+37,5)e^{-0,12x} + (2,25x^2+37,5x+312,5)\cdot e^{-0,12x}\cdot(-0,12)\right] \\ &= \left[-4,5x-37,5-(2,25x^2+37,5x+312,5)\cdot(-0,12)\right]\cdot e^{-0,12x} \\ &= (-4,5x-37,5+0,27x^2+4,5x+37,5)\cdot e^{-0,12x} \\ &= 0,27x^2\cdot e^{-0,12x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Es muss weiterhin noch überprüft werden, ob g die gegebene Anfangsbedingung — dass nämlich vor 19.00 Uhr noch keine Besucher am Kartenschalter sind — erfüllt. Es muss $g(0) = 0$ sein:

$$g(0) = 312,5 - (2,25\cdot 0^2 + 37,5\cdot 0 + 312,5)\cdot e^{-0,12\cdot 0} = 312,5 - 312,5\cdot \underbrace{e^0}_{=1} = 0.$$

Somit ist auch diese Bedingung erfüllt. g beschreibt tatsächlich die Anzahl der angekommenen Personen seit 19.00 Uhr.

Bestimmung der maximalen Besucherzahl

Hier muss nun untersucht werden, ob sich die Besucheranzahl nach einer längeren Zeit (also für sehr große x) einem maximalen Wert nähert — Wir bilden den Grenzwert von g für $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left[312,5-(2,25x^2+37,5x+312,5)\cdot\underbrace{e^{-0,12x}}_{\to 0}\right] = 312,5 - 0 = 312,5$$

Es kommen maximal etwa 312 Personen zum Kino.

c) **Bestimmung der Wartezeit ab 19.20 Uhr** (6VP)

Es muss zunächst berechnet werden, wieviele Personen um 19.20 bereits am Kartenschalter warten:

$$g(20) = 312,5 - (2,25\cdot 20^2 + 37,5\cdot 20 + 312,5)\cdot e^{-0,12\cdot 20} \approx 134$$

Es ist weiterhin bekannt, dass nun pro Minute 6 Personen abgefertigt werden. Somit haben nach $134 : 6 \approx 22,3$ Minuten alle 134 wartenden Besucher eine Karte erhalten.

Berechnung der größten Anzahl an wartenden Personen

Bis um 19.20 Uhr warten 134 Personen am Kartenschalter, der nun öffnet. Die Anzahl $h(x)$ der nun noch wartenden Personen setzt sich zusammen aus den bisher angekommenen Personen abzüglich der Personen, die seit 19.20 Uhr abgefertigt werden.

Die Anzahl der bisher angekommenen wird durch $g(x)$ beschrieben.

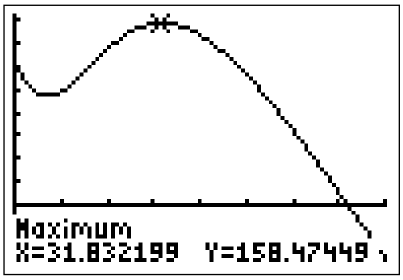
Da pro Minute weiterhin 6 Personen abgefertigt werden können, sind zum Zeitpunkt x genau $6\cdot(x-20)$ Personen abgefertigt (Hinweis: Es darf hier nicht x, sondern muss $x-20$ stehen, da der Schalter ja erst um 19.20 Uhr aufmacht und daher eine 20-minütige Verzögerung eintritt!).

Somit gilt insgesamt als Anzahl der wartenden Personen zum Zeitpunkt x:

$h(x) = g(x) - 6 \cdot (x - 20)$.

Nun muss mit dem GTR das Maximum von h über $\boxed{\text{2nd} \to \text{TRACE (CALC)} \to \text{4: maximum}}$ berechnet werden, es liegt etwa bei $x \approx 31,8$ und beträgt ca. $158,47$.

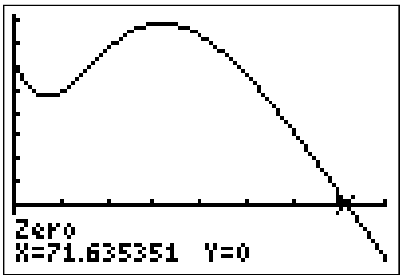
Etwa um 19.32 Uhr ist die Anzahl der Wartenden am größten, sie umfasst dann etwa 158 Personen.



Berechnung der Zeit, nach der sich die Warteschlange aufgelöst hat

Hier muss nun mithilfe des GTR die Zeit berechnet werden, nach der die Anzahl $h(x)$ der wartenden Personen Null beträgt. Mit dem Befehl $\boxed{\text{2nd} \to \text{TRACE (CALC)} \to \text{2: zero}}$ ergibt sich $x \approx 71,6$.

Gegen 20.12 Uhr hat sich die Warteschlange aufgelöst.



d) **Personenanzahl, die nun pro Minute abgefertigt werden muss** (3VP)

Der Schalter wird um 19.50 Uhr öffnen und die Warteschlange soll um 20.30 Uhr aufgelöst sein. Somit bleiben zur Abfertigung 40 Minuten.

Bis 20.30, also in einem Zeitraum von 90 Minuten kommen weiterhin $g(90) \approx 312$ Personen beim Kino an. All diese Personen müssen innerhalb dieser 40 Minuten abgefertigt werden. Pro Minute wäre dies eine Anzahl von $312 : 40 = 7,8$ Personen.

Es müssen pro Minute etwa 8 Personen abgefertig werden, damit die Warteschlange um 20.30 Uhr abgebaut ist.