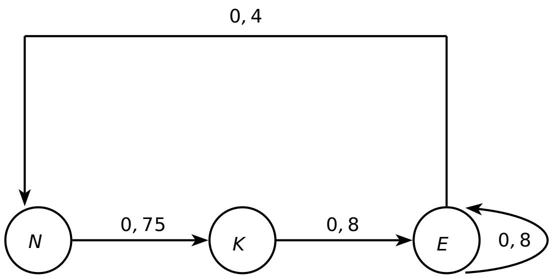
a) ▶ **Entwicklung in Übergangsgraphen darstellen** (12P)



▶ **Biologische Bedeutung beschreiben**

Das Matrixelement $a_{13} = 0,4$ gibt an, dass 40% der erwachsenen Tiere ein Neugeborenes bekommen. (Vorausgesetzt, dass jedes erwachsene Tier nur ein Neugeborenes bekommt).

Der Anteil der erwachsenen Tiere, die in der Herde verblieben sind, wird durch den Eintrag $a_{33} = 0,8$ ausgedrückt. 80% der erwachsenen Tiere verbleiben nach einem Jahr in der Herde.

Um den Anteil der Neugeborenen zu ermitteln, die das Erwachsenenstadium erreichen, gehen wir von einer beliebigen Anfangsverteilung $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_N \\ v_K \\ v_E \end{pmatrix}$ aus und betrachten, wie sich diese Anfangsverteilung nach zwei Jahren entwickelt hat:

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_N \\ v_K \\ v_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4v_E \\ 0,75v_N \\ 0,8v_K + 0,8v_E \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4v_E \\ 0,75v_N \\ 0,8v_K + 0,8v_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \cdot (0,8v_K + 0,8v_E) \\ 0,75 \cdot 0,4v_E \\ 0,8 \cdot 0,75v_N + 0,8 \cdot (0,8v_K + 0,8v_E) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,32v_K + 0,32v_E \\ 3v_E \\ 0,6v_N + 0,64v_K + 0,64v_E \end{pmatrix}$$

Es ist hier gut zu erkennen, dass insgesamt 60% der Neugeborenen ins Erwachsenenstadium kommen.

b) ▶ **Verteilungen $\overrightarrow{v}_1$ und $\overrightarrow{v}_2$ berechnen** (10P)

Die Verteilung, die in der Aufgabenstellung gegeben ist, lässt sich auffassen als Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \cdot 100 \\ 0,75 \cdot 40 \\ 0,8 \cdot 150 + 0,8 \cdot 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \cdot 200 \\ 0,75 \cdot 40 \\ 0,8 \cdot 30 + 0,8 \cdot 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 30 \\ 184 \end{pmatrix}$$

► **Verteilung für das vergangene Jahr berechnen**

Sei die Verteilung des Vorjahres $\overrightarrow{v}_{\text{alt}} = \begin{pmatrix} v_N \\ v_K \\ v_E \end{pmatrix}$. Gesucht ist nun der Vektor, auf den du die Matrix anwenden kannst und somit die Verteilung aus der Aufgabenstellung erhältst:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_N \\ v_K \\ v_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4v_E \\ 0,75v_N \\ 0,8v_K + 0,8v_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lr} \text{I} & 0,4v_E = 40 \\ \text{II} & 0,75v_N = 150 \\ \text{III} & 0,8v_K + 0,8v_E = 100 \end{array}$$

Aus I folgt, dass $v_E = 100$; aus II folgt, dass $v_N = 200$. Setze v_E ein in III:

$$\begin{aligned} 0,8v_K + 0,8 \cdot 100 &= 100 \\ 0,8v_K + 80 &= 100 \quad \mid -80 \\ 0,8v_K &= 20 \quad \mid : 0,8 \\ v_K &= 25 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Verteilung des Vorjahres: $\overrightarrow{v}_{\text{alt}} = \begin{pmatrix} 200 \\ 25 \\ 100 \end{pmatrix}$.

c) ► **Gleich bleibende Verteilung ermitteln** (10P)

Gesucht ist eine Verteilung $\overrightarrow{v}_{\text{fest}} = \begin{pmatrix} v_N \\ v_K \\ v_E \end{pmatrix}$, die sich nicht verändert, wenn die Matrix A auf sie angewandt wird; in Formeln:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_N \\ v_K \\ v_E \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_N \\ v_K \\ v_E \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0,4v_E \\ 0,75v_N \\ 0,8v_K + 0,8v_E \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_N \\ v_K \\ v_E \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lr} \text{I} & 0,4v_E = v_N \\ \text{II} & 0,75v_N = v_K \\ \text{III} & 0,8v_K + 0,8v_E = v_E \end{array}$$

Aus I folgt $v_N = 0,4v_E$. Setze dies ein in II:

$$\begin{aligned} 0,75\cdot 0,4v_E &= v_K \\ 0,3v_E &= v_K \end{aligned}$$

Setze dieses Ergebnis ein in III:

$$\begin{aligned} 0,8\cdot 0,3v_E + 0,8v_E &= v_E \\ 0,24v_E + 0,8v_E &= v_E \quad \mid -v_E \\ 0,04v_E &= 0 \quad \mid :0,04 \\ v_E &= 0 \end{aligned}$$

Aus $v_E = 0$ folgt automatisch $v_N = 0$ und $v_K = 0$. Dies ist zwar eine mathematisch korrekte Lösung, macht aber im Anwendungszusammenhang im Bezug auf die Größe eine Rinderherde keinen Sinn.

Es gibt also **keine** Verteilung auf die Altersstufen, die sich im Folgejahr wiederholt, außer die Nullverteilung.

d) ▸ **Verteilung berechnen** (6P)

Es soll die Verteilung nach einem Krankheitsjahr (Matrix B) und nach einem normalen Jahr (Matrix A) berechnet werden:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4\cdot 100 \\ 0,5\cdot 40 \\ 0,8\cdot 150 + 0,8\cdot 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4\cdot 200 \\ 0,75\cdot 40 \\ 0,8\cdot 20 + 0,8\cdot 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 30 \\ 176 \end{pmatrix}$$

e) ▸ **Matrizenprodukt berechnen** (12P)

$$\begin{aligned} A\cdot B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0\cdot 0 + 0\cdot 0,5 + 0,4\cdot 0 & 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0,4\cdot 0,8 & 0\cdot 0,4 + 0\cdot 0 + 0,4\cdot 0,8 \\ 0,75\cdot 0 + 0\cdot 0,5 + 0\cdot 0 & 0,75\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0,8 & 0,75\cdot 0,4 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0,8 \\ 0\cdot 0 + 0,8\cdot 0,5 + 0,8\cdot 0 & 0\cdot 0 + 0,8\cdot 0 + 0,8\cdot 0,8 & 0\cdot 0,4 + 0,8\cdot 0 + 0,8\cdot 0,8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0,32 & 0,32 \\ 0 & 0 & 0,3 \\ 0,4 & 0,64 & 0,64 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir werden hier exemplarisch beschreiben, wie die letzte Zeile der Matrix zustande kommt.

Die erste Spalte der letzten Zeile ist das Ergebnis der Multiplikation der dritten Zeile von Matrix A mit der ersten Spalte von Matrix B.

Die zweite Spalte der letzten Zeile ist das Ergebnis der Multiplikation der dritten Zeile von Matrix A mit der zweiten Spalte von Matrix B. Entsprechend für die dritte Spalte der letzten Zeile.

Die $0,4$ in der ersten Spalte der letzten Zeile von Matrix C beispielsweise geht direkt aus der Rechnung $0\cdot 0 + 0,8\cdot 0,5 + 0,8\cdot 0$ hervor.

► Interpretation der Komponenten

Zunächst ist es wichtig zu beachten, dass diese Matrix ja die Verteilung nach **zwei** Jahren angibt. Beginne mit der ersten Zeile:

32% der (jetzigen) Kälber bekommen in zwei Jahren ein Neugeborenes, 32% der jetzigen erwachsenen Tiere bekommen in zwei Jahren ein Neugeborenes.

30% der jetzigen erwachsenen Tiere haben in zwei Jahren ein Kalb (das ein Jahr zuvor noch ein Neugeborenes war.)

40% der jetzigen Neugeborenen sind in zwei Jahren erwachsene Tiere. 64% der jetzigen Kälber sind in zwei Jahren erwachsene Tiere und 64% der jetzigen erwachsenen Tiere verbleiben auch in zwei Jahren noch in der Zucht.

► Nachweis der Relevanz der Reihenfolge

Eben wurde die Matrix C so berechnet, dass die Krankheit im zweiten Jahr auftritt. Zu zeigen ist nun, dass sich eine andere Matrix C' ergibt, wenn die Krankheit bereits im ersten Jahr auftritt:

$$C' = B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0,75 + 0,4 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0,4 \cdot 0,8 & 0 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,8 \\ 0,5 \cdot 0 + 0 \cdot 0,75 + 0 \cdot 0 & 0,5 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0,8 & 0,5 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0,8 \\ 0 \cdot 0 + 0,8 \cdot 0,75 + 0,8 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0,8 \cdot 0 + 0,8 \cdot 0,8 & 0 \cdot 0,4 + 0,8 \cdot 0 + 0,8 \cdot 0,8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0,32 & 0,32 \\ 0 & 0 & 0,2 \\ 0,6 & 0,64 & 0,64 \end{pmatrix}$$

Da $C \neq C'$ ist erwiesen, dass es relevant ist, in welchem Jahr die Krankheit auftritt.