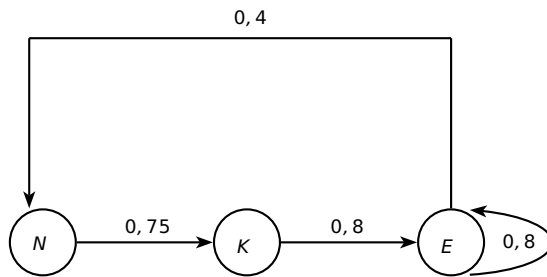


a) ► **Entwicklung in Übergangsgraphen darstellen**

(10P)



► **Biologische Bedeutung beschreiben**

Das Matrixelement $a_{13} = 0,4$ gibt an, dass 40% der erwachsenen Tiere ein Neugeborenes bekommen. (Vorausgesetzt, dass jedes erwachsene Tier nur ein Neugeborenes bekommt).

Der Anteil der erwachsenen Tiere, die in der Herde verblieben sind, wird durch den Eintrag $a_{33} = 0,8$ ausgedrückt. 80% der erwachsenen Tiere verbleiben nach einem Jahr in der Herde.

Um den Anteil der Neugeborenen zu ermitteln, die das Erwachsenenstadium erreichen, gehen wir von einer beliebigen Anfangsverteilung $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_N \\ v_K \\ v_E \end{pmatrix}$ aus und betrachten, wie sich diese

Anfangsverteilung nach zwei Jahren entwickelt hat:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_N \\ v_K \\ v_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4v_E \\ 0,75v_N \\ 0,8v_K + 0,8v_E \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4v_E \\ 0,75v_N \\ 0,8v_K + 0,8v_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \cdot (0,8v_K + 0,8v_E) \\ 0,75 \cdot 0,4v_E \\ 0,8 \cdot 0,75v_N + 0,8 \cdot (0,8v_K + 0,8v_E) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,32v_K + 0,32v_E \\ 3v_E \\ 0,6v_N + 0,64v_K + 0,64v_E \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es ist hier gut zu erkennen, dass insgesamt 60% der Neugeborenen ins Erwachsenenstadium kommen.

b) ► **Verteilungen \vec{v}_1 und \vec{v}_2 berechnen**

(8P)

Die Verteilung, die in der Aufgabenstellung gegeben ist, lässt sich auffassen als

Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix}$.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \cdot 100 \\ 0,75 \cdot 40 \\ 0,8 \cdot 150 + 0,8 \cdot 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \cdot 200 \\ 0,75 \cdot 40 \\ 0,8 \cdot 30 + 0,8 \cdot 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 30 \\ 184 \end{pmatrix}$$

► Verteilung für das vergangene Jahr berechnen

Sei die Verteilung des Vorjahres $\vec{v}_{\text{alt}} = \begin{pmatrix} v_N \\ v_K \\ v_E \end{pmatrix}$. Gesucht ist nun der Vektor, auf den du die

Matrix anwenden kannst und somit die Verteilung aus der Aufgabenstellung erhältst:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_N \\ v_K \\ v_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4v_E \\ 0,75v_N \\ 0,8v_K + 0,8v_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad \quad \quad 0,4v_E = 40 \\ \text{II} \quad \quad \quad 0,75v_N = 150 \\ \text{III} \quad 0,8v_K + 0,8v_E = 100 \end{array}$$

Aus I folgt, dass $v_E = 100$; aus II folgt, dass $v_N = 200$. Setze v_E ein in III:

$$\begin{array}{l} 0,8v_K + 0,8 \cdot 100 = 100 \\ 0,8v_K + 80 = 100 \quad | -80 \\ 0,8v_K = 20 \quad | :0,8 \\ v_K = 25 \end{array}$$

Daraus ergibt sich die Verteilung des Vorjahres: $\vec{v}_{\text{alt}} = \begin{pmatrix} 200 \\ 25 \\ 100 \end{pmatrix}$.

c) ► Anteil der zu verkaufenden Kälber ermitteln

(12P)

Betrachte die Übergangsmatrix A : Der Eintrag, der den Anteil der Kälber beschreibt, welche im nächsten Jahr zu erwachsenen Tieren werden, befindet sich in der 2. Spalte der 3. Zeile und lautet momentan 0,8.

Laut dieser Übergangsmatrix A werden also 20% der Kälber verkauft und 80% der Kälber bleiben in der Herde und werden zu erwachsenen Tieren.

Ersetze diesen Wert 0,8 durch einen Parameter t und erhalte damit die Matrix A^* .

t soll nun so bestimmt werden, dass die Verteilung der Tiere konstant bleibt, d.h. dass eine

Verteilung $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ sich unter der Matrix A^* nicht verändert:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0,4v_3 \\ 0,75v_1 \\ tv_2 + 0,8v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} \text{I} \qquad \qquad \qquad 0,4v_3 = v_1 \\ \text{II} \quad 0,75v_1 \qquad \qquad = \quad v_2 \\ \text{III} \qquad \qquad tv_2 + 0,8v_3 = \quad v_3 \end{array}$$

Aus III folgt:

$$\begin{aligned} tv_2 + 0,8v_3 &= v_3 & | -0,8v_3 \\ tv_2 &= 0,2v_3 & | :0,2 \\ 5tv_2 &= v_3 \end{aligned}$$

Setze $v_3 = 5tv_2$ ein in I:

$$\begin{aligned} 0,4 \cdot 5tv_2 &= v_1 \\ 2tv_2 &= v_1 \end{aligned}$$

Setze nun $v_1 = 2tv_2$ ein in II:

$$\begin{aligned} 0,75 \cdot 2tv_2 &= v_2 \\ 1,5tv_2 &= v_2 & | :1,5v_2 \quad (v_2 \neq 0, \text{ weil sich ohne Kälber keine sinnvolle Verteilung ergibt}) \\ t &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Der Anteil der Kälber, die nach einem Jahr **in der Herde zu erwachsenen Tieren werden**, liegt bei $\frac{2}{3}$. Damit müssen $\frac{1}{3}$ der Kälber verkauft werden.

► Anfangsverteilung ermitteln

Ermittle eine Verteilung \vec{v}^* , welche unter der Matrix $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0,8 \end{pmatrix}$ gleich bleibt.

Betrachte dazu deine Ergebnisse aus dem ersten Teil dieser Teilaufgabe:

$$v_3 = t \cdot 5tv_2, \quad v_1 = 2tv_2, \quad v_2 = v_2. \text{ Setze } t = \frac{2}{3} \text{ ein und erhalte den Vektor } \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}v_2 \\ v_2 \\ \frac{10}{3}v_2 \end{pmatrix}$$

Es ist nachgewiesen, dass diese Verteilung immer gleich bleibt. Wähle v_2 nun so, dass die Koordinaten des Vektors **ganze Zahlen** werden. Dies ist z.B. für $v_2 = 3$ der Fall:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}. \text{ Eine mögliche Anfangsverteilung besteht aus 4 neugeborenen Tieren, 3 Kälbern}$$

und 10 erwachsenen Tieren.

d) ► Menge der zu kaufenden bzw. zu verkaufenden Tiere ermitteln

(12P)

Es wird von der Anfangsverteilung aus Aufgabenteil b) ausgegangen. Betrachte zunächst die Verteilung, die sich nach einem Krankheitsjahr ergibt:

$$\vec{v}_1 = B \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \cdot 100 \\ 0,5 \cdot 40 \\ 0,8 \cdot 150 + 0,8 \cdot 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Diese Verteilung soll nun in den einzelnen Altersgruppen so zu einer Verteilung

$$\vec{v}_1^* = \begin{pmatrix} 40 + v_1 \\ 20 + v_2 \\ 200 + v_3 \end{pmatrix} \text{ verändert werden, dass sich nach einem normalen Jahr wieder die An-}$$

fangungsverteilung ergibt:

$$A \cdot \vec{v}_1^* = \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 + v_1 \\ 20 + v_2 \\ 200 + v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,4 \cdot (200 + v_3) \\ 0,75 \cdot (40 + v_1) \\ 0,8 \cdot (20 + v_2) + 0,8 \cdot (200 + v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 80 + 0,4v_3 \\ 30 + 0,75v_1 \\ 0,8v_2 + 0,8v_3 + 176 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Betrachte die drei Zeilen einzeln als Gleichung:

$$\begin{array}{lcl} \text{I} & 80 + 0,4v_3 = 40 & | -80 \\ \text{II} & 30 + 0,75v_1 = 150 & | -30 \\ \text{III} & 0,8v_2 + 0,8v_3 + 176 = 100 & | -176 \\ \hline \text{I} & 0,4v_3 = -40 & \Rightarrow v_3 = -100 \\ \text{II} & 0,75v_1 = 120 & \Rightarrow v_1 = 160 \\ \text{III} & 0,8v_2 + 0,8 \cdot (-100) = -76 & \Rightarrow v_2 = 5 \end{array}$$

Nach einem Krankheitsjahr müssen 160 Neugeborene und 5 Kälber hinzugekauft und 100 erwachsene Tiere verkauft werden, damit nach einem normalen Jahr wieder der Anfangsbestand erreicht wird.

e) ► **Matrizenprodukt berechnen**

(8P)

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0,4 \cdot 0,8 & 0 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0 + 0,4 \cdot 0,8 \\ 0,75 \cdot 0 + 0 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0 & 0,75 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0,8 & 0,75 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0,8 \\ 0 \cdot 0 + 0,8 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0,8 \cdot 0 + 0,8 \cdot 0,8 & 0 \cdot 0,4 + 0,8 \cdot 0 + 0,8 \cdot 0,8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0,32 & 0,32 \\ 0 & 0 & 0,3 \\ 0,4 & 0,64 & 0,64 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

► **Produkt von C mit \vec{v} berechnen**

Multipliziere C mit dem Vektor \vec{v} , welcher die Anfangsverteilung aus Aufgabenteil b) darstellt:

$$C \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0,32 & 0,32 \\ 0 & 0 & 0,3 \\ 0,4 & 0,64 & 0,64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,32 \cdot 150 + 0,32 \cdot 100 \\ 0,3 \cdot 100 \\ 0,4 \cdot 40 + 0,64 \cdot 150 + 0,64 \cdot 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 30 \\ 176 \end{pmatrix}$$



► **Interpretation der Komponenten der Matrix**

Zunächst ist es wichtig zu beachten, dass diese Matrix ja die Verteilung nach **zwei** Jahren angibt. Beginne mit der ersten Zeile:

32% der (jetzigen) Kälber bekommen in zwei Jahren ein Neugeborenes, 32% der jetzigen erwachsenen Tiere bekommen in zwei Jahren ein Neugeborenes.

30% der jetzigen erwachsenen Tiere haben in zwei Jahren ein Kalb (das ein Jahr zuvor noch ein Neugeborenes war.)

40% der jetzigen Neugeborenen sind in zwei Jahren erwachsene Tiere. 64% der jetzigen Kälber sind in zwei Jahren erwachsene Tiere und 64% der jetzigen erwachsenen Tiere verbleiben auch in zwei Jahren noch in der Zucht.

► **Interpretation des Vektors $C \cdot \vec{v}$**

Nach einem normalen Jahr und dann nach einem Krankheitsjahr hat sich eine Rinderherde, die aus 40 neugeborenen Tieren, 150 Kälbern und 100 erwachsenen Tieren besteht entwickelt zu einer Herde, die aus 80 neugeborenen Tieren, 30 Kälbern und 176 erwachsenen Tieren besteht.