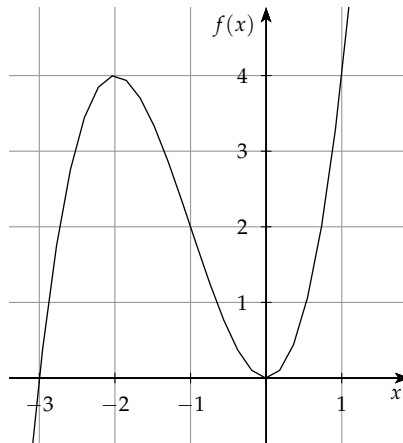


Aufgabenstellung:

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 + 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph der Funktion f wird in der Abbildung dargestellt.

- a) (1) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f . (13P)
- (2) Berechnen Sie die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte der Funktion f .
- b) Man betrachtet die Verschiebung, welche den Wendepunkt $W(-1 | 2)$ der Funktion f auf den Ursprung des Koordinatensystems abbildet. (8P)
- (1) Zeigen Sie rechnerisch: Durch die genannte Verschiebung wird der Graph der Funktion f auf den Graphen der Funktion h mit der Gleichung $h(x) = x^3 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$, abgebildet.
- (2) Begründen Sie nun, dass der Graph der Funktion f punktsymmetrisch zu seinem Wendepunkt $W(-1 | 2)$ ist.
- c) (1) Die Graphen der Funktionen f und h schließen eine Fläche ein. Berechnen Sie deren Inhalt. (14P)
- (2) Es sei p die Parallele zur x -Achse durch den Wendepunkt $W(-1 | 2)$ der Funktion f . Bestimmen Sie (zum Beispiel mit Hilfe von b) (1)) den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen der Funktion f und der Geraden p eingeschlossen wird.
- d) Für eine beliebige positive reelle Zahl a ist die Funktion f_a mit der Gleichung $f_a(x) = x^3 + ax^2$, $x \in \mathbb{R}$, gegeben. Für $a = 3$ erhält man z. B. die zuvor betrachtete Funktion f . (15P)
- (1) Es sei w_a die Tangente im Wendepunkt W_a der Funktion f_a . Ermitteln Sie eine Gleichung von w_a in Abhängigkeit von a .
[Zur Kontrolle: $w_a(x) = -\frac{1}{3}a^2x - \frac{1}{27}a^3$, $x \in \mathbb{R}$]
- (2) Die Tangente w_a schließt im III. Quadranten eine Fläche mit den Koordinatenachsen ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von a .



Abbildung