a)

▸ Wahrscheinlichkeit berechnen

Bei dieser Aufgabe ist gegeben, dass in einer Lostrommel **10% der Lose Gewinne** sind. Es handelt sich folglich um **Ziehen mit Zurücklegen**. Wir können festhalten, dass die Wahrscheinlichkeit, ein Gewinnlos zu ziehen, bei jedem Zug gleich bleibt.

▸ Berechne die Wahrscheinlichkeit von Ereignis *A*

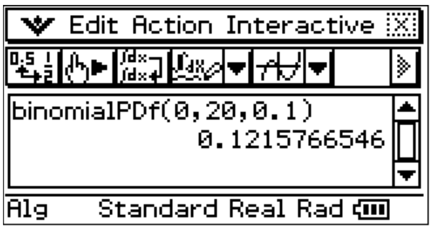
Hier sollst du berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit unter **20 Losen kein Preis** dabei ist. Dazu definieren wir uns die Zufallsvariable X, die die Anzahl der Gewinnlose unter den 20 Zügen beschreibt.
Zuvor hast du überlegt, dass sich die Wahrscheinlichkeit, ein Gewinnlos zu ziehen, nicht ändert. Weiterhin gibt es auch nur die Option ein Gewinnlos zu ziehen oder nicht (In diesem Fall wird dann eine Niete gezogen). Damit ist die Zufallsvariable X **binomialverteil** mit den Parametern:

- $n = 20$: Insgesamt öffnet Jana 20 Lose.
- $p = \frac{1}{10}$: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % ist unter diesen Losen ein Gewinn.
- $k = 0$: Wir wollen wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass Jana kein Gewinn erhält.

Berechne also **P(X=0)**.

Berechne die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit dem CAS. Verwende dazu den `binomPdf`-Befehl, welcher über folgende Eingabefolge aufrufbar ist:

$$\boxed{\texttt{Interactive} \longrightarrow \texttt{Distribution}}$$



Die Wahrscheinlichkeit, dass beim Ziehen von 20 Losen kein Preis dabei ist, beträgt 0,1216 also **12,26%**.

▸ Berechne die Wahrscheinlichkeit von Ereignis *B*

Hier sollst du berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit unter 20 gezogenen Losen weniger als 5 Lose einen Preis gewinnen. **X muss also kleiner als 5** sein. Auch hier kannst du die eine Zufallsvariable X definieren.
Zuvor hast du überlegt, dass sich die Wahrscheinlichkeit, ein Gewinnlos zu ziehen, nicht ändert. Weiterhin gibt es auch nur die Option ein Gewinnlos zu ziehen oder nicht (In diesem Fall wird dann eine Niete gezogen). Damit ist die Zufallsvariable X **binomialverteil** mit den Parametern:

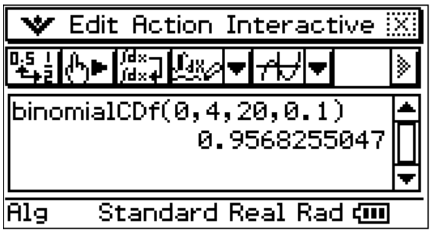
- $n = 20$: Insgesamt öffnet Jana 20 Lose.

- $p = \frac{1}{10}$: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % ist unter diesen Losen ein Gewinn.
- $k < 5$: Wir wollen wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass Jana kein Gewinn erhält.

Berechne also $\boldsymbol{P(X < 5) = P(X \leq 4)}$.

Berechne die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit dem CAS. Verwende dazu den `binomCdf`-Befehl, welcher über folgende Eingabefolge aufrufbar ist:

`Interactive → Distribution`



Die Wahrscheinlichkeit, dass beim ziehen von 20 Losen weniger als 5 Lose einen Preis gewinnen, beträgt 0,9568, also **95,68%**.

▸ Berechne die Wahrscheinlichkeit von Ereignis *C*

Hier sollst du berechnen mit welcher Wahrscheinlichkeit Jana zuerst 3 Nieten zieht und unter den 17 danach gezogenen Losen genau zwei Gewinnlose sind.
Bei dieser Aufgabe ist es wichtig die **Reihenfolge** zu beachten. Als erstes werden **3 Nieten** gezogen. Die Wahrscheinlichkeit für eine Niete kannst du wie folgt berechnen:

$P(„Niete“) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

Anschließend werden 17 weitere Lose gezogen, bei denen die Reihenfolge keine Rolle spielt. Innerhalb von diesen 17 Losen sollen lediglich 2 Gewinnlose gezogen werden. Das heißt, wir können die ersten drei Nieten mit Hilfe der **Pfadmultiplikation** berechnen und anschließend die Wahrscheinlichkeit für die 17 restlichen Lose mit Hilfe der **Binomialverteilung** bestimmen. Es gilt also:

$$P(C) = P(\text{„Zuerst 3 Nieten“} + \text{„17 weitere Lose, 2 Gewinne“}) = \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot P(X = 2)$$

Die Zufallsvariable X ist hier mit den folgenden Parametern binomialverteilt:

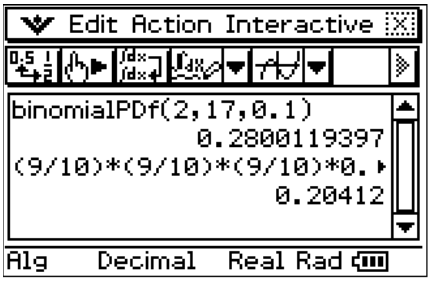
- $n = 17$: Anschließend öffnet Jana 17 Lose.
- $p = \frac{1}{10}$: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % ist unter diesen Losen ein Gewinn.
- $k = 2$: Wir wollen wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass Jana genau zwei Gewinne erhält.

Unter

`Interactive → Distribution`

findest du den `binomPdf`-Befehl.
Das CAS liefert dir:

$P(C) = \left(\frac{9}{10}\right)^3 \cdot P_{17,\frac{1}{10}}(X=2) \approx 0,2041$



Die Wahrscheinlichkeit, dass Jana zuerst 3 Nieten zieht und unter den anderen 17 Losen sich noch genau 2 Gewinnlose befindet beträgt dann 0,2041, also 20,41%.

b)

▸ Berechnen der Gewinnwahrscheinlichkeit

Um zu zeigen, dass die Angabe des Losverkäufers falsch ist, berechnest du die tatsächliche Gewinnwahrscheinlichkeit für das Ereignis „mindestens ein Gewinnlos“ bei der Ziehung von 30 Losen. Hierbei kannst du ähnlich vorgehen wie bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses C aus dem vorherigen Aufgabenteil. Allerdings würdest du in diesem Fall die Tabelle für $n = 30$ benötigen. Diese hast du allerdings nicht gegeben. Du kannst hier aber wieder mit der **Formel für die Binomialverteilung** arbeiten, indem du die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe des **Gegenereignisses** umformst. Führe dazu zuerst eine neue Zufallsvariable Z ein, die die Anzahl der Gewinne unter 30 Losen beschreibt.

1. Schritt: Zufallsvariable einführen

Die Zufallsvariable Z beschreibe nun die Anzahl der Gewinne unter 30 Losen. Sie ist aus den gleichen Gründen wie auch X binomialverteilt, allerdings mit den Parametern $p = 0,1$ und $n = 30$.

2. Schritt: Wahrscheinlichkeit umformen

Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $Z \geq 1$ ist. Mit Hilfe des Gegenereignisses, erhältst du folgendes:

$$\begin{aligned} P(Z \geq 1) &= 1 - P(Z < 1) \\ &= 1 - P(Z \leq 0) \\ &= 1 - P(Z = 0) \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für $P(Z = 0)$ kannst du nun wieder mit Hilfe der Formel für die Binomialverteilung berechnen:

$$\boxed{\boldsymbol{P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}}$$

Setze dort die entsprechenden Parameter ein: $p = 0,1$, $n = 30$, $k = 0$. Dann erhältst du folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} P(Z \geq 1) &= 1 - P(Z = 0) \\ &= 1 - \binom{30}{0} \cdot 0,1^0 \cdot (0,9)^{30} \\ &\approx 1 - 0,0424 \\ &= 0,9576 \\ &= 95,76\,\% \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter 30 Losen mindestens ein Gewinn befindet, ergibt sich mit der Formel für die Binomialverteilung mit ca. 95,76 %. Der Losverkäufer hat demnach eine zu hohe Gewinnwahrscheinlichkeit versprochen.

▸ Mindestanzahl der Lose berechnen

Nun sollst du berechnen, wie viele Lose gekauft werden müssten, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens ein Gewinnlos darunter ist. Du kannst hier ähnlich vorgehen wie oben. Allerdings suchst du in diesem Fall ***n*** und weißt, dass

$$\boxed{\boldsymbol{P(Z \geq 1) \geq 0,99}}$$

gelten soll. Z ist dabei in diesem Fall binomialverteilt mit den Parametern $p = 0,1$ und unbekanntem n. Forme hier die Wahrscheinlichkeit wieder mit Hilfe des Gegenereignisses um und wende anschließend wie oben die Formel für die Binomialverteilung an. Du erhältst dann eine Ungleichung in Abhängigkeit von n, die du nach n lösen kannst.

$$\begin{aligned}
P(Z \geq 1) &\geq 0,99 && \\
1 - P(Z = 0) &\geq 0,99 && \mid -1 \\
-P(Z = 0) &\geq -0,01 && \mid \cdot(-1) \\
P(Z = 0) &\leq 0,01 && \text{Formel für die Binomialverteilung} \\
\binom{n}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^n &\leq 0,01 && \\
0,9^n &\leq 0,01 && \mid \ln \\
\ln(0,9^n) &\leq \ln(0,01) && \\
n \cdot \ln(0,9) &\leq \ln(0,01) && \mid : \ln(0,9) < 0 \\
n &\geq 43,71 && \\
n 44 & &&
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt muss aufgerundet werden, da die Ungleichung nur für größere n, nicht aber für kleinere erfüllt ist und im Kontext der Aufgabenstellung auch nur ganzzahlige Werte sinnvoll sind. Halbe Lose gibt es ja schließlich nicht. Insgesamt folgt, dass mindestens 44 Lose gekauft werden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens ein Gewinnlos mindestens 99 % beträgt.

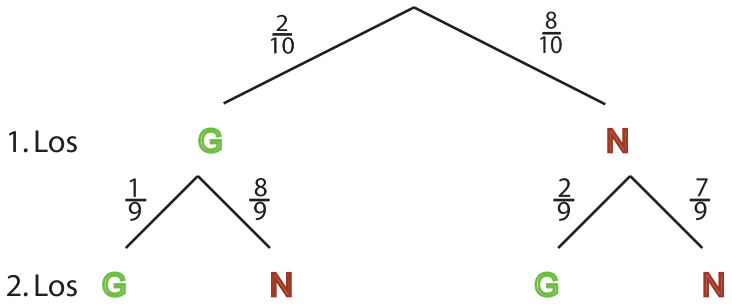
c)

▸ Wahrscheinlichkeit für ein Gewinnlos unter Janas Losen

1. Neues Zufallsexperiment

Jana zieht **zufällig** die zwei Lose, die sie ihrer Schwester schenkt, aus der bekannten Menge der zehn gekauften Lose. Es handelt sich um ein weiteres Zufallsexperiment mit neuen Wahrscheinlichkeiten für die bekannten Ereignisse „Niete“ und „Gewinnlos“. Da Jana zwei Lose zieht, kannst du dieses Zufallsexperiment als zweistufig betrachten: Sie zieht zuerst das erste Los und wählt dann aus den verbleibenden 9 Losen das zweite Los für ihre Schwester aus. Hierbei handelt es sich also um ein **Ziehen ohne Zurücklegen**. Zieht sie eines der Lose aus der Menge, so ändert sich die Wahrscheinlichkeit für das zweite Los.

Hierzu kannst du dir ein Baumdiagramm anlegen, um mehr Übersicht zu haben.



Du sollst die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, dass Jana noch genau ein Gewinnlos hat, wenn sie zwei Lose an ihre Schwester abgegeben hat. Dies entspricht dem Ereignis, dass sie genau ein Gewinnlos und eine Niete an ihre Schwester abgibt. Mit den **Pfadadditions und -multiplikationsregeln** kannst du nun die entsprechende Wahrscheinlichkeit mit Hilfe des Baumdiagramms berechnen. Hier gibt es zwei Pfade die diesem Ereignis entsprechen:

1. Das erste Los das Jana für ihre Schwester auswählt ist ein Gewinnlos und das zweite ist eine Niete.
2. Genau umgekehrt: Das erste Los ist eine Niete und das zweite ist ein Gewinn.

$$\begin{aligned}
P(\text{Jana hat genau ein Los übrig}) &= P(\text{Jana gibt ein Gewinnlos und eine Niete an ihre Schwester ab}) \\
&= P(G-N) + P(N-G) \\
&= \tfrac{2}{10}\cdot\tfrac{8}{9} + \tfrac{8}{10}\cdot\tfrac{2}{9} \\
&\approx 0,3556 \\
&= 35,56\,\%
\end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $35,56\,\%$ hat Jana noch genau ein Gewinnlos, nachdem sie zwei Lose an ihre Schwester abgegeben hat.

d)

▸ Anzahl der Wahlmöglichkeiten für Jana

Aus den drei vorhandenen Sorten von Plüschtieren möchte Jana zwei **verschiedene** Plüschtiere auswählen. Überlege dir zuerst logisch, welche Möglichkeiten Jana dafür hat:

1. Sie kann einen Bären und einen Hasen auswählen.
2. Sie kann einen Bären und einen Affen auswählen.
3. Sie kann einen Hasen und einen Affen auswählen.

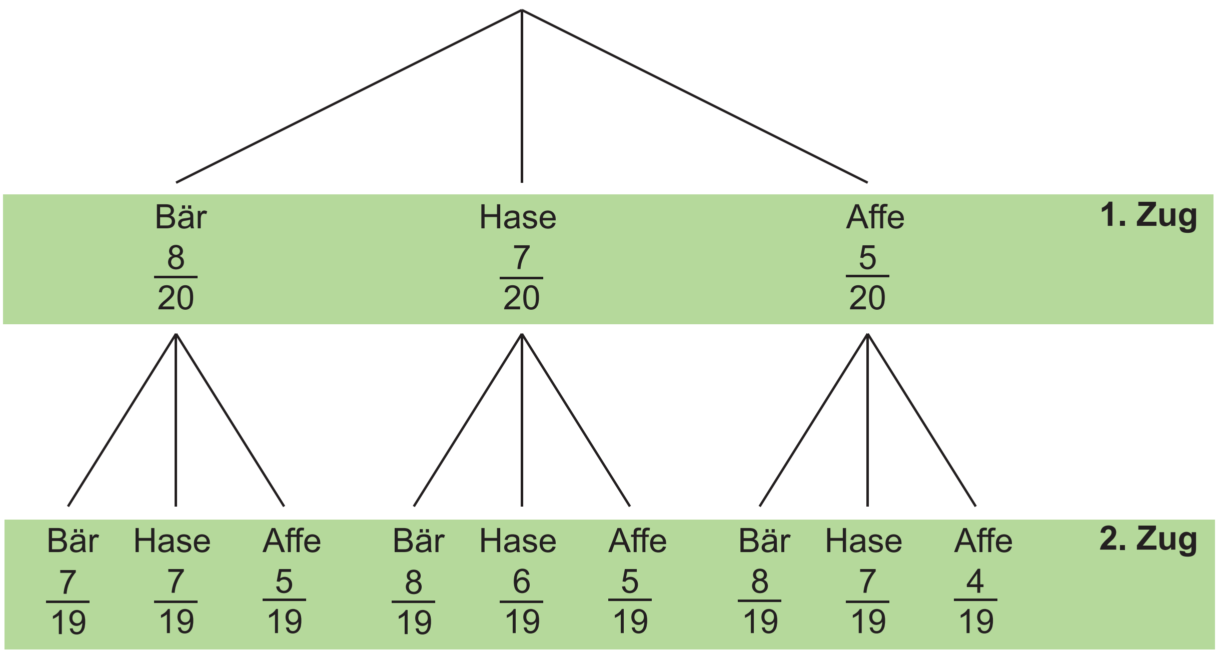
Weitere Möglichkeiten gibt es nicht, denn Jana möchte zwei unterschiedliche Tiere und die Reihenfolge, in der Jana die Plüschtiere auswählt, ist egal.

▸ Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedene Tierarten

Jana verwendet ein **Zufallsexperiment**, um zwei Plüschtiere aus dem Korb zu ziehen. Dabei zieht sie **ohne Zurücklegen** und ohne Beachtung der Reihenfolge.

1. Aufstellen des Baumdiagramms

Das zweistufige Zufallsexperiment lässt sich mit einem Baumdiagramm darstellen. Die zu jedem Pfad gehörigen Wahrscheinlichkeiten kannst du der Aufgabenstellung entnehmen: von insgesamt 20 Plüschtieren sind 7 Hasen, 5 Affen und 8 Bären. Beachte: da es sich um ein Zufallsexperiment mit Ziehen ohne Zurücklegen handelt, sind beim 2. Zug nur noch 19 Plüschtiere im Korb.



2. Berechnen der Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedene Tierarten

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Jana zwei verschiedene Plüschtiere zieht. Dafür musst du nach der **Pfadadditionsregel** alle Ergebniswahrscheinlichkeiten der Pfade addieren, in denen zwei verschiedene Plüschtiere gezogen werden. Nach der **Pfadmultiplikationsregel** musst du vorher allerdings zuerst diese Ergebiswahrscheinlichkeiten berechnen:

$P(\text{Bär; Hase}) = \dfrac{8}{20} \cdot \dfrac{7}{19} = \dfrac{14}{95}$ $\qquad$ $P(\text{Hase; Affe}) = \dfrac{7}{20} \cdot \dfrac{5}{19} = \dfrac{7}{76}$

$P(\text{Bär; Affe}) = \dfrac{8}{20}\cdot\dfrac{5}{19} = \dfrac{2}{19}$ $\qquad P(\text{Affe; Bär}) = \dfrac{5}{20}\cdot\dfrac{8}{19} = \dfrac{2}{19}$

$P(\text{Hase; Bär}) = \dfrac{7}{20}\cdot\dfrac{8}{19} = \dfrac{14}{95}$ $\qquad P(\text{Affe; Hase}) = \dfrac{5}{20}\cdot\dfrac{7}{19} = \dfrac{7}{76}$

Jetzt kannst du mithilfe der berechneten Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse und der **Pfadadditionsregel** die gesuchte Wahrscheinlichkeit ermitteln:

$P(\text{zwei verschiedene Plüschtiere}) =$

$P(\text{Bär; Hase})+P(\text{Bär; Affe}) +P(\text{Hase; Bär}) +P(\text{Hase; Affe})+P(\text{Affe; Bär})+P(\text{Affe; Hase})=$

$\dfrac{14}{95}+\dfrac{2}{19}+\dfrac{14}{95}+\dfrac{7}{76}+\dfrac{2}{19}+\dfrac{7}{76} = 0,6895 = 68,95\%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Jana zwei verschiedene Tierarten gewählt hat, liegt bei 68,95%.

e)

▸ Wahrscheinlichkeit für Ereignis E berechnen

In der Aufgabe ist gegeben, dass Jana 20 Lose kauft und sich unter diesen Losen genau **m Gewinnlose** befinden und $20-m$ Nieten. Jana **wählt zwei Lose aus** und öffnet diese.

Betrachte das Ereignis E mit „Unter den geöffneten Losen ist genau ein Gewinnlos“. Hierbei handelt es sich um **„Ziehen ohne Zurücklegen“**.
Es gibt **zwei Möglichkeiten** genau ein Gewinnlos zu ziehen:

1. Das erste geöffnete Los ist ein Gewinnlos.
2. Das zweite geöffnete Los ist ein Gewinnlos.

▸▸ 1. Option: Erstes Los ist Gewinnlos

Die Wahrscheinlichkeit, dass das erste geöffnete Los das Gewinnlos ist, beträgt $\frac{m}{20}$.
Das zweite Los, welches geöffnet wird, muss hier eine Niete sein. Da schon ein Los gezogen wurde, sind jetzt nur noch 19 Lose übrig (Ziehen ohne Zurücklegen). Die Wahrscheinlichkeit eine Niete zu ziehen beträgt damit $\frac{20-m}{19}$.
Jetzt kannst du die **Pfadmultiplikationsregel** benutzen und erhältst für die erste Möglichkeit:

$\frac{m}{20}\cdot\frac{20-m}{19}$

▸▸ 2. Option: Zweites Los ist Gewinnlos

Als erstes soll Jana hier eine Niete ziehen. Die Anzahl der Nieten beträgt 20-m und man zieht aus 20 Losen. Als Wahrscheinlichkeit erhältst du dann $\frac{20-m}{20}$.

Jetzt muss das zweite Los ein Gewinnlos sein. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist dann $\frac{m}{19}$.

Du kannst wieder die Pfadmultiplikationsregel benutzen und erhältst für die zweite Möglichkeit:

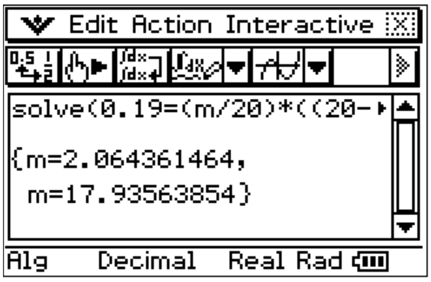
$\frac{20-m}{20}\cdot\frac{m}{19}$.

Um $P(E)$ zu erhalten, kannst du die **Pfadadditionsregel** verwenden.

$P(E) = \frac{m}{20}\cdot\frac{20-m}{19}+\frac{20-m}{20}\cdot\frac{m}{19}$.

▶ Anzahl *m* bestimmen

In der Aufgabe hast du $P(E) \approx 0,19$ gegeben. Ermittle dafür einen passenden Wert für m. Dazu kannst du die oben stehende Gleichung mit dm genannten Wert gleichsetzen und nach m auflösen.



Verwende dazu das CAS.
Die Anzahl der Gewinnlose in 20 Losen m ist 2 und 18.
Wenn in den 20 Losen 18 Nieten und 2 Gewinnlose sind, ist die Wahrscheinlichkeit sehr klein, dass unter den geöffneten Losen ein Gewinnlos ist. Wenn aber in den 20 Losen 18 Gewinnlose und nur 2 Nieten sind, ist die Wahrscheinlichkeit, eine Niete zu ziehen, klein. Deshalb gibt es zwei Möglichkeiten für die Anzahl der Gewinnlose.