1.1 ► Berechnen der gesuchten Wahrscheinlichkeiten (11BE)

Im Folgenden wird Zufallsvariable X betrachtet, welche die Anzahl fehlerhafter Chips in der Stichprobe beschreibt. X hat dabei folgende Eigenschaften:

- X kann als binomialverteilt angenommen werden
- Größe der Stichprobe: $n = 50$
- Wahrscheinlichkeit für fehlerhaften Chip: $p = 0,15$

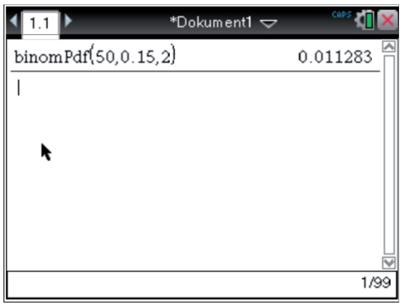
Die Wahrscheinlichkeiten werden im Folgenden mit Hilfe der Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten einer binomialverteilten Zufallsvariable berechnet:
$P(X \leq k) = \sum\limits_{i=0}^{k} P(X = k) = \sum\limits_{i=1}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$.
Beim Berechnen der gesuchten Wahrscheinlichkeit kann dir außerdem dein CAS von Nutzen sein.

(1) ► Wahrscheinlichkeit: genau zwei Chips sind fehlerhaft

Zu Berechnen ist hier $P(X = 2)$:
$$P(X = 2) = \binom{50}{2} \cdot 0,15^2 \cdot (1 - 0,15)^{50-2} = \binom{50}{2} \cdot 0,15^2 \cdot 85^{48} = 0,011$$

alternativ

Alternativ kannst du $P(X = 2)$ auch mit Hilfe deines CAS berechnen.



Verwende dazu den `binomPdf(..)` - Befehl, welchen du über diese Eingabenfolge in den Calculator - Modus einfügst:

`menu` → `5: Wahrscheinlichkeit` → `5: Verteilungen`
→ `D: Binomial Pdf...`

Wende den Befehl wie folgt an, um die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu berechnen:

`binomPdf(n,p,k)` $\Longrightarrow$ `binomPdf(50,0,15,2)`

$\Longrightarrow$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von 1,1 % sind genau 2 von 50 Chips fehlerhaft.

(2) ► Wahrscheinlichkeit: mindestens zwei Chips sind fehlerhaft

Zu Berechnen ist hier $P(X \geq 2)$. Berechne diese Wahrscheinlichkeit mit Hilfe des zugehörigen Gegenereignisses ($P(X < 2)$):
$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - \left(\sum_{i=0}^{1} P(X = k) \right) \\ &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - \left(\binom{50}{0} \cdot 0,15^0 \cdot 0,85^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0,15^1 \cdot 0,85^{49} \right) \\ &= 1 - (0,000295 + 0,0026) = 0,9971 \end{aligned}$$

alternativ

Alternativ kannst du auch hier die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 2)$ mit Hilfe deines CAS berechnen.

Verwende dazu den `binomCdf(..)` - Befehl, welchen du über diese Eingabenfolge in den Calculator - Modus einfügst:

$\boxed{\texttt{menu} \rightarrow \texttt{5: Wahrscheinlichkeit} \rightarrow \texttt{5: Verteilungen}}$

$\boxed{\rightarrow \texttt{E: Binomial Cdf...}}$

Wende den Befehl wie folgt an, um die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 2)$ zu berechnen:

$\boxed{\texttt{binomCdf}(n,p,k) \Longrightarrow \; 1- \texttt{binomCdf}(50{,}0{,}15{,}1) \; \Leftrightarrow \; 1-P(X \leq 1)}$

$\Longrightarrow$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,71 % sind mindestens 2 von 50 Chips fehlerhaft.

(3) ▶ **Wahrscheinlichkeit: höchstens zwei Chips sind fehlerhaft**

Zu Berechnen ist hier $P(X \leq 2)$. Berechne die Wahrscheinlichkeit mit der oben gegebenen Formel:

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= \sum_{i=0}^{2} P(X=k) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\ &= \binom{50}{0} \cdot 0{,}15^0 \cdot 0{,}85^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0{,}15^1 \cdot 0{,}85^{49} + \binom{50}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{48} \\ &= 0{,}000295 + 0{,}0026 + 0{,}011 = 0{,}0139 \end{aligned}$$

alternativ

Auch hier kannst du die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit deinem CAS berechnen. Füge dazu wie oben die benötigten Befehle in den Calculator - Modus deines Rechners ein.

Die hier gesuchte Wahrscheinlichkeit ($P(X \leq 2)$) berechnet sich über die Eingabe folgender Befehlsreihenfolge:

$\boxed{\texttt{binomCdf}(50{,}0{,}15{,}2)}$

$\Longrightarrow$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von 1,39 % sind höchstens 2 von 50 Chips fehlerhaft.

1.2 ▶ **Erklären der Ungleichungen und Interpretieren des Ergebnisses im Sachzusammenhang**

Im Folgenden werden die Ungleichungen zeilenweise erklärt und interpretiert:

1. Zeile: $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) > 0{,}99$

Die hier betrachtete Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der fehlerhaften Chips. X ist binomialverteilt mit $p = 0{,}15$ und unbekanntem Stichprobenumfang n.

- $P(X \geq 1)$: Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Chip fehlerhaft ist.
- $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$: Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit über das zugehörige Gegenereignis $P(X=0)$.
- $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) > 0{,}99$: Bestimmen von n so, dass die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 1)$ größer 99 % ist.

2. Zeile: $P(X=0)=0,85^n>0,99$

Die in der ersten Zeile aufgestellte Ungleichung wurde wie folgt umgeformt, um zu dieser Zeile zu gelangen:

$$\begin{aligned} P(X\geq 1)=1-P(X=0) &> 0,99 \\ 1-\binom{n}{0}\cdot 0,15^0\cdot 0,85^n &> 0,99 \\ 1-1\cdot 1\cdot 0,85^n &> 0,99 \qquad \mid -1 \\ -1\cdot 0,85^n &> -0,01 \qquad \mid :(-1) \\ 0,85^n &< 0,01 \end{aligned}$$

3. Zeile: $n>28,33$

Um zum Ergebnis der dritten Zeile zu gelangen, muss die oben aufgestellte Ungleichung wie folgt aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} 0,85^n &< 0,01 \qquad \mid \ln(\;) \\ n\cdot\ln(0,85) &< \ln(0,01) \qquad \mid :\ln(0,85) \quad (\text{Achtung: } \ln(0,85)<0!) \\ n &> \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,85)}\approx 28,33 \end{aligned}$$

Interpretation des Ergebnisses:

Es müssen mindestens 29 Chips untersucht werden, um mit mehr als 99 % Wahrscheinlichkeit mindestens einen fehlerhaften Chip zu finden.

2.1 ▶ **Ermitteln, wie oft „Electronix" gebeten wurde, die Mikrochips zu ersetzen** (6BE)

Ein Chip ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 15 % fehlerhaft. Electronix hat genau 6000 Kunden mit je 100 Chips beliefert. Sei auch hier wieder X die Anzahl der fehlerhaften Chips in der Lieferung und binomialverteilt mit $n=100$ und $p=0,15$.
Der gesuchte Erwartungswert (Anzahl der Reklamationen) berechnest du so:

- 1. Schritt: Ermitteln der Wahrscheinlichkeit dafür, dass mind. 20 % der Lieferung fehlerhaft ist
- 2. Schritt: Bestimmen der Anzahl, wieviele Kunden erwartungsgemäß reklamieren

1. Schritt:

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 20 % der Lieferung, bzw. $0,2\cdot 100=20$ Chips fehlerhaft sind, ermittelst du mit dem Hinweis aus der Aufgabenstellung:
$P(X\geq 20)=0,5398$.
$\Longrightarrow$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von 53,98 % sind mehr als 20 % der Chips einer Lieferung fehlerhaft.

2. Schritt:

Erwartungsgemäß hätten also $0,5398\cdot 6000=3239$ Kunden das Recht auf eine Reklamation. Da aber nur 50 % der Kunden dieses Recht in Anspruch nehmen, wurde Electronix also $0,5\cdot 3239\approx 1619$ Mal gebeten, die Chips zu ersetzen.

2.2 ► Anteil der Kunden ermitteln

Halb so viele Lieferungen wären in diesem Fall etwa 809 Lieferungen. Da nur 50 % der Kunden einen Ersatz beanspruchen, hätten insgesamt also 1.618 von 6.000 Kunden einen Anspruch auf Reklamation haben dürfen.

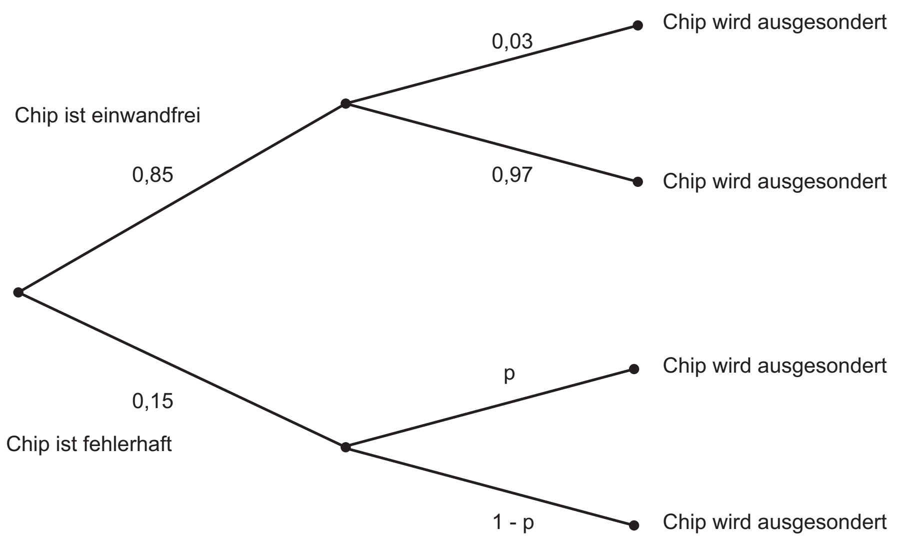
$\Longrightarrow$ Dies entspricht $\frac{1618}{6000} \approx 0,27$, also 27 % der Kunden.

3.1 ► Darstellen der Situation in einem Baumdiagramm (6BE)

Tipps beim Erstellen des Baumdiagramms:

1. Das Baumdiagramm hat insgesamt 2 Stufen
2. In der ersten Stufe wird zwischen einwandfreiem und fehlerhaftem Chip unterschieden
3. In der zweiten Stufe werden die jeweiligen Situationen, ausgesondert oder nicht ausgesondert, betrachtet

Baumdiagramm:



3.2 ► Erklären des Ansatzes und bestimmen der Wahrscheinlichkeit *p*

Bevor du damit beginnst, diese Aufgabe zu lösen, solltest du dir vor Augen führen, aus welchen Bestandteilen der dir gegebene Ansatz besteht:

- 0,15: Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Chip fehlerhaft ist
- p: Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein fehlerhafter Chip ausgesondert wird
- 0,85: Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Chip einwandfrei ist
- 0,03: Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Chip einwandfrei ist und trotzdem ausgesondert wird
- 0,17: Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Chip ausgesondert wird

Betrachtest du also den gegebenen Ansatz genauer, so kannst du erkennen, dass mit diesem, bei gegebenem p, die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet wird, dass ein Chip ausgesondert wird. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Chip ausgesondert wird, ergibt sich aus dem Baumdiagramm. Verfolge dazu die passenden Pfade und addiere die einzelnen Wahrscheinlichkeiten untereinander.
Da dir bekannt ist, wie diese Wahrscheinlichkeit zusammengesetzt ist, kannst du mit dieser die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, dass ein fehlerhafter Chip ausgesondert wird.

Zusammensetzung der Wahrscheinlichkeit, dass ein Chip ausgesondert wird:

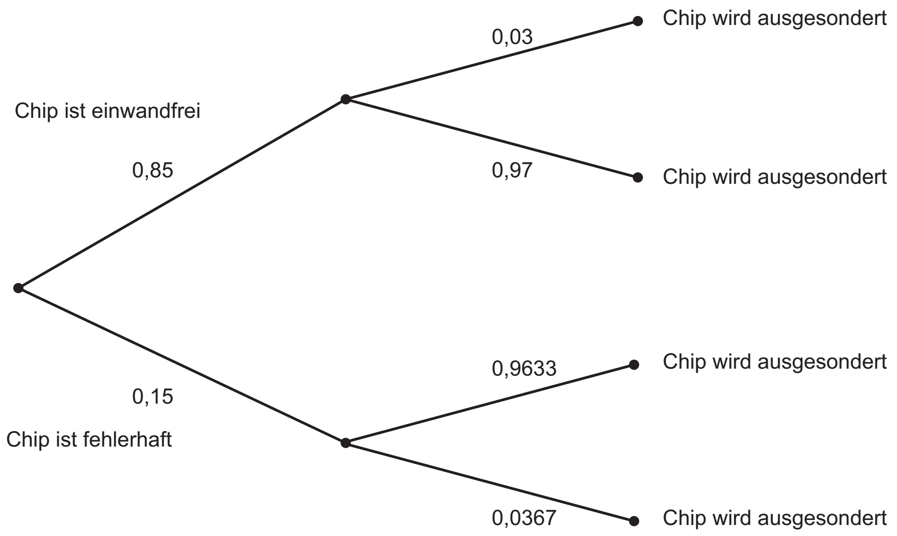
$$\begin{aligned} P(\text{C. wird ausgesondert}) &= P(\text{C. ist fehlerhaft}) \cdot P(\text{C. fehlerhaft/ausgesondert}) \quad + \\ &\quad P(\text{C. ist einwandfrei}) \cdot P(\text{C. einwandfrei/ausgesondert}) \end{aligned}$$

Bestimmen von p:

$$\begin{aligned} 0,15 \cdot p + 0,85 \cdot 0,03 &= 0,17 \\ 0,15 \cdot p + 0,0255 &= 0,17 \qquad \mid -0,0255 \\ 0,15 \cdot p &= 0,1445 \Leftrightarrow \; p \approx 0,9633 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein fehlerhafter Chip ausgesondert wird, beträgt 96,33 %.

Vervollständigtes Baumdiagramm:



3.3 ▶ **Ermitteln der Wahrscheinlichkeit, dass ein ausgesonderter Chip fehlerhaft war**

Bei der Wahrscheinlichkeit, dass ein ausgesonderter Chip tatsächlich fehlerhaft war, handelt es ich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit. Dabei bezeichnet hier A das Ereignis, dass ein Chip ausgesondert wurde, und F das Ereignis, dass der ausgesonderte Chip fehlerhaft war.
Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$, dass ein Chip ausgesondert wird, liegt bei $P(A) = 0,17$, da 17 % aller Chips ausgesondert werden (siehe 3.2).

Die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(F)$, dass ein ausgesonderter Chip tatsächlich fehlerhaft war, berechnet sich über folgenden Term:

$P_A(F) = \dfrac{P(A \cap F)}{P(A)}$.

Die gesuchte zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit $P(A \cap F) = P(F \cap A)$ bestimmst du mit Hilfe des Baumdiagramms. $P(F \cap A)$ beschreibt dabei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Chip fehlerhaft war und ausgesondert wurde. Berechne die Wahrscheinlichkeit also über Pfadmultiplikation:

$P(F \cap A) = 0,15 \cdot 0,9633 = 0,145$.

Berechnen der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_A(F)$:

$P_A(F) = \dfrac{P(A \cap F)}{P(A)} = \dfrac{0,145}{0,17} \approx 0,8229$

$\Longrightarrow$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von 82,29 % ist ein ausgesonderter Chip tatsächlich fehlerhaft.

4.1 ► **Angeben der getesteten Nullhypothese**

Bei der oben beschriebenen Situation handelt es sich ganz offensichtlich um einen Hypothesentest, bei dem die Frage überprüft wird, ob der Anteil der fehlerhaften Chips nachweislich gesenkt wurde oder nicht. Das heißt, es lassen sich folgende zwei Hypothesen formulieren:
$p_0 = 0,15$; der Anteil der defekten Chips ist nicht gesunken. Diese Hypothese will verworfen werden:
$\Longrightarrow$ Nullhypothese: $H_0 : p_0 \geq 0,15$.

$p_1 < 0,15$, der Anteil defekter Chips ist gesunken. Diese Hypothese will man bestätigen:
$\Longrightarrow H_1 : p_1 < 0,15$.

4.2 ► **Berechnen der gesuchten Wahrscheinlichkeiten**

In den folgenden zwei Teilaufgaben wird Zufallsvariable Z betrachtet. Z ist binomialverteilt mit $n = 200$ und einem variierendem p. Zufallsvariable Z beschreibt die Anzahl fehlerhafter Chips in der Stichprobe.

(1) ► **Wahrscheinlichkeit: Team erhält Prämie, obwohl sich Anteil nicht verändert hat**

Bevor du damit beginnst, diese Aufgabe zu bearbeiten, solltest du die vor Augen führen, unter welchen Umständen das Team die Prämie ausgezahlt bekommt:

- Schritt 1: Berechnen der Anzahl an defekten Chips, bei denen das Team gerade noch die Prämie erhält

Hast du diese Anzahl bestimmt, so ermittelst du die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 200 betrachteten Chips höchstens die von dir berechnete Anzahl an fehlerhaften Chips gefunden wurde, obwohl der Anteil der fehlerhaften Chips unverändert bei 15 % liegt.

- Schritt 2: Berechnen der Wahrscheinlichkeit, dass das Team die Prämie fälschlicherweise ausgezahlt bekommt

1. Schritt:

Sind höchstens 22 von 200 Chips fehlerhaft, so erhält das Team die Prämie.

2. Schritt:

Sei Z nun mit $p = 0,15$ und $n = 200$ verteilt, so ergibt sich für $k = 22$ aus der Tabelle für die Binomialverteilung:
$P(Z \leq 22) \approx 0,0645$.

alternativ

Alternativ kannst du auch wie im Aufgabenteil 1 die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit Hilfe deines CAS berechnen. Wende dazu den `binomcdf(..)` wie folgt an:

$\boxed{\texttt{binomCdf}(n,p,k) \rightarrow \texttt{binomCdf}(200{,}0.15{,}22)}$

$\Longrightarrow$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von 6,45 % wird dem Team die Prämie gewährt, obwohl sich der Anteil der fehlerhaften Chips sich nicht verändert hat.

(2) ▶ **Wahrscheinlichkeit: Team erhält Prämie nicht, obwohl sich Anteil verringert hat**

Hier ist gefragt nach der Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Team die Prämie nicht bekommt, d.h. dass mehr als 22 fehlerhafte Chips in der Stichprobe gefunden werden, obwohl der Anteil der fehlerhaften Chips tatsächlich bei 10 % liegt.

Sei Z nun mit $p = 0,1$ und $n = 200$ verteilt. Gesucht ist $P(Z > 22)$:
$P(Z > 22) = 1 - P(Z \leq 22) = 1 - 0,729 = 0,271$ (Wert aus Tabelle)

alternativ

Befehlsreihenfolge für die Berechnung mit dem CAS:

$\boxed{\texttt{binomCdf}(n,p,k) \rightarrow \texttt{1 - binomCdf}(200{,}0.15{,}22) \Leftrightarrow 1 - P(Z \leq 22)}$

$\Longrightarrow$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von 27,1 % bekommt das Team die Prämie nicht, obwohl der Anteil der fehlerhaften Chips tatsächlich auf 10 % gesunken ist.