2.1 ▶ **Angabe der zu erwartenden Anzahl älterer Ehepaare** (3BE)

Unter den 60 Interessenten traten die älteren Ehepaare mit einer Wahrscheinlichkeit von $30\% = 0{,}30$ auf. Es waren daher insgesamt $60 \cdot 0{,}30 = 18$ ältere Ehepaare unter den Interessenten zu erwarten.

▶ **Wahrscheinlichkeit, dass über 30 Anfragen von jungen Familien stammen**

Es sei X die Anzahl der Anfragen, die von jungen Familien mit Kindern stammen. Diese Zufallsgröße ist binomialverteilt mit $n = 60$ Anfragen und $p = 50\% = 0{,}5$.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 60 Anfragen mehr als 30, **also mindestens 31** Anfragen waren. Diese Wahrscheinlichkeit ergibt sich leicht über das Gegenereignis und mit dem GTR:

$P(X \geq 31) = 1 - P(X \leq 30) \approx 1 - 0{,}5513 = 0{,}4487 \approx 44{,}9\%$.

2.2 ▶ **Angabe der Koordinaten der Eckpunkte *A*, *B*, *G* und *L*** (2BE)

Der Punkt A liegt senkrecht unter Punkt F in der x-y-Ebene und hat die Koordinaten $A(16{,}0;\ 0{,}0;\ 0{,}0)$.

Der Punkt B liegt 8 Meter, also 8 Einheiten weiter in y-Richtung als A und hat die Koordinaten $B(16{,}0;\ 8{,}0;\ 0{,}0)$.

Der Punkt G liegt 6 Meter, also 6 Einheiten senkrecht über B und hat die Koordinaten $G(16{,}0;\ 8{,}0;\ 6{,}0)$.

Der Punkt L liegt nicht 8, sondern 4 Meter weiter in y-Richtung als A und 11 Meter darüber, hat also die Koordinaten $L(16{,}0;\ 4{,}0;\ 11{,}0)$.

2.3 ▶ **Berechnung der Bruttokosten für die Dachdeckung** (4BE)

Die Dachfläche ist ein **Trapez** mit den parallelen Seiten $\overline{MN}$ und $\overline{HI}$. Für die Längen a und c dieser Seiten gilt:

$$a = \overline{MN} = |\overrightarrow{MN}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + 14^2 + 0^2} = 14\text{ m};$$

$$c = \overline{HI} = |\overrightarrow{HI}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + 10^2 + 0^2} = 10\text{ m}.$$

Als Höhe (die senkrecht zu beiden Parallelen stehen muss) kann die Seite $\overline{IN}$ angesehen werden:

$$h = \overline{IN} = |\overrightarrow{IN}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{41}.$$

Für die Fläche dieses Daches gilt damit nach der Trapezformel:

$$A_{HINM} = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{14+10}{2} \cdot \sqrt{41} = 12\sqrt{41} \approx 76{,}8\text{ m}^2.$$

Für den Nettopreis wird die Maßzahl der Fläche mit dem Quadratmeterpreis von 100,84 Euro multipliziert: $12 \cdot \sqrt{41} \cdot 100{,}84\,€ \approx 7748{,}29\,€$.

Der **Brutto-Preis** enthält zusätzlich noch 19 % Mehrwertsteuer. 19 % des Nettopreises entsprechen $0{,}19 \cdot 7748{,}29\,€ \approx 1472{,}18\,€$. Der Brutto-Preis liegt damit bei $7748{,}29\,€ + 1472{,}18\,€ \approx 9220{,}50\,€$.

Wichtig ist, dass in dieser Rechnung für den Flächeninhalt der **exakte** Wert des Taschenrechners genommen wird. Mit dem gerundeten Wert würde sich nämlich ein Preis von nur etwa 9216 € ergeben.

2.4 ▶ **Überprüfung der Dachneigung** (5BE)

Die Dachneigung entspricht dem Schnittwinkel der Ebene E_{HIN}, in der die Dachfläche $HINM$ liegt, mit der Grundflächenebene (x-y-Ebene).

Für die Ebene E_{HIN} gilt zunächst in Parameterform:

$$E_{HIN}\colon \vec{x} = \overrightarrow{OH} + r\cdot\overrightarrow{HI} + s\cdot\overrightarrow{HN} = \begin{pmatrix}8\\8\\6\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\10\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-4\\10\\5\end{pmatrix}\ (r,s\in\mathbb{R}).$$

Der GTR kann diese Parametergleichung mit einem geeigneten Programm leicht in ihre Koordinatengleichung $5x+4z-64=0$ überführen.

Der Schnittwinkel zwischen E_{HIN} und der Grundflächenebene mit der Gleichung $z=0$ wird ebenfalls mit dem GTR bestimmt. Dabei entspricht der Winkel zwischen zwei Ebenen genau dem Winkel zwischen ihren Normalenvektoren; in diesem Fall $\overrightarrow{n}_{HIN} = \begin{pmatrix}5\\0\\4\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n}_{xy} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

$\alpha = \measuredangle(E_{HIN};\ E_{xy}) \approx 51{,}3°$.

Die Empfehlung des Herstellers wird daher eingehalten.

▶ **Berechnung des Abstands der Strebenspitze zur Dachfläche *HINM***

Die Spitze S der Strebe, die senkrecht auf dem Dachboden in $T(7;\,13;\,6)$ verankert ist, liegt 1,5 m höher als T und hat damit die Koordinaten $S(7;\,13;\,7{,}5)$. Der Abstand dieser Spitze zur Dachfläche $HINM$ entspricht dem Abstand von S zur Ebene E_{HIN}.

Dieser Abstand kann mit einem geeigneten GTR-Programm berechnet werden. Es ergibt sich:

$d(S;\,E_{HIN}) \approx 0{,}16$ m.

2.5 ▶ **Berechnung des Inhalts der zu verglasenden Fläche** (4BE)

Die zu verglasende Fläche wird nach oben hin durch eine Parabel begrenzt, die symmetrisch zur y-Achse liegt. Als Ansatz für diese Parabel wählen wir daher $f(x)=ax^2+c$.

Die Parabel schneidet (im Koordinatensystem gesehen) die y-Achse im Punkt $(0;\,3{,}5)$, da sie hier die maximale Höhe von 3,5 m erreicht. Einsetzen in die Funktionsgleichung ergibt:

$$f(0)=3{,}5 \quad\Leftrightarrow\quad a\cdot 0^2+c=3{,}5 \quad\Leftrightarrow\quad c=3{,}5.$$

Da die untere Begrenzung auf der x-Achse insgesamt 7 m lang ist und symmetrisch zur y-Achse liegt, hat die Parabel weiterhin die Nullstellen $x=\pm 3{,}5$. Das heißt, die Punkte $(3{,}5;\,0)$ und $(-3{,}5;\,0)$ liegen ebenfalls auf der Parabel.

Beispielsweise muss also $f(3{,}5)=0$ gelten. Einsetzen in die Funktionsgleichung ergibt:

$$f(3{,}5) = a \cdot 3{,}5^2 + 3{,}5 = 0$$
$$12{,}25a = -3{,}5$$
$$a = \frac{-3{,}5}{12{,}25} = -\frac{2}{7}.$$

Wir erhalten damit die Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{2}{7}x^2 + \frac{7}{2}$.

Der zu verglasende Fläche entspricht nun der Fläche, die die Parabel mit der x-Achse zwischen ihren Nullstellen $x = -3{,}5$ und $x = 3{,}5$ einschließt. Für den Inhalt dieser Fläche gilt nun ganz leicht mit dem GTR:

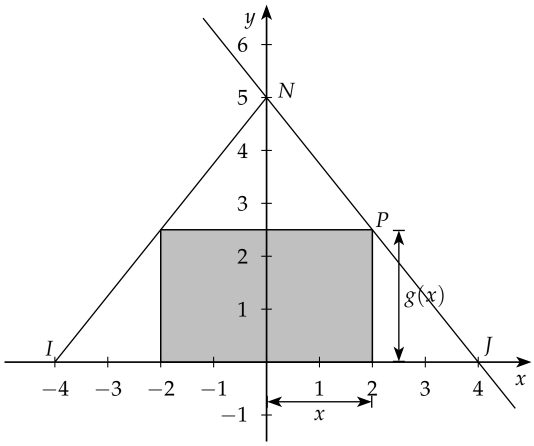
$$A = \int_{-3{,}5}^{3{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-3{,}5}^{3{,}5} \left(-\frac{2}{7}x^2 + \frac{7}{2}\right)\,\mathrm{d}x \approx 16{,}3\ \mathrm{m}^2.$$

2.6 ► **Berechnung des maximalen Querschnittsflächeninhalts** (4BE)

Wir betrachten die Querschnittsfläche im gleichschenkligen Giebeldreieck IJN. Sie ist rechteckig, ein Eckpunkt P liegt auf der Seite $\overline{JN}$.

Die Gerade g, in der diese Seite liegt, verläuft durch die Punkte $N(0;\,5)$ und $J(4;\,0)$. Für ihre Steigung gilt:

$$m = \frac{y_J - y_N}{x_J - x_N} = \frac{0-5}{4-0} = -\frac{5}{4} = -1{,}25.$$



Ihr y-Achsenabschnitt beträgt laut Abbildung $n = 5$, sodass wir über die allgemeine Geradengleichung $y = mx + n$ die Gleichung $y = -1{,}25x + 5$ erhalten.

Wenn $P(x;\,g(x))$ ein Eckpunkt der Querschnittsfläche ist, gilt für den Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen $a = 2x$ und $b = g(x)$:

$$A(x) = 2x \cdot g(x) = 2x \cdot (-1{,}25x + 5) = -2{,}5x^2 + 10x.$$

Diese Funktion A gibt dir also abhängig von x den Flächeninhalt des Rechtecks aus. Gesucht ist nach dem **maximalen** Flächeninhalt. Du kannst also mit Hilfe des GTR das **absolute Maximum** im Bereich $0 < x < 4$ von A ermitteln. Es ergibt sich ein Maximum für $x = 2$.

Für den Flächeninhalt des Rechtecks gilt dann $A_{\max} = A(2) = 10\ \mathrm{m}^2$.