1.1 ► Graphen von $\ln(x)$ und $\ln(x^2)$ skizzieren und Veränderungen beschreiben und begründen (5P)

Skizziere die Graphen von $\ln(x)$ und $\ln(x^2)$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem. Achte darauf, dass beide Kurven die x-Achse in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Du kannst zwei Wertetabellen erstellen und anhand dieser die Funktionsgraphen zeichnen:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\ln(x)$	–	–	–	–	0	$0,7$	$1,1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\ln(x^2)$	$2,2$	$1,4$	0	–	0	$1,4$	$2,2$

Anschließend kannst du zwei signifikante Veränderungen beobachten, die durch das Quadrat hervorgerufen werden:

1. $\ln(x^2)$ ist auch für $x < 0$ definiert.
2. Der neue Graph verläuft im Positiven für $x < 1$ unter und für $x > 1$ über der Kurve von $\ln(x)$.

1.2 ► Parameterwerte a bestimmen, für die $\ln\left(\frac{x^2}{a}\right)$ definiert ist (2P)

Betrachte die Funktionsgleichung: Hier könnten sowohl die Lage des Parameterwerts im Nenner eines Bruchs als auch der Definitionsbereich des natürlichen Logarithmus den Definitionsbereich von a einschränken.

1.3 ► Punktsymmetrie zeigen (2P)

Zu zeigen ist: Wenn der Graph einer Funktion g in ihrem Definitionsbereich achsensymmetrisch ist, so ist der Graph einer Funktion h

$h(x) = x \cdot g(x)$

punktsymmetrisch.

Ist der Graph einer Funktion g achsensymmetrisch zur y-Achse, so erfüllt ihr Funktionsterm die Bedingung für Achsensymmetrie:

(1) $\quad g(-x) = g(x)$

Ist eine Funktion h punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, so erfüllt ihr Funktionsterm die Bedingung für Punktsymmetrie:

(2) $\quad h(-x) = -h(x)$

1.4 ► Grenzwert untersuchen (3P)

Der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0}\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right)$$

lässt sich nicht sofort aus dem Term ableiten, da sich hier nicht eindeutig ein Grenzwert ergibt, wenn man die Grenzwerte der einzelnen Faktoren des Produkts bildet:

$\lim\limits_{x\to 0} x = 0 \quad$ und $\quad \lim\limits_{x\to 0} \ln(x^2) = -\infty$

Du kannst den Grenzwert allerdings bestimmen, indem du folgende drei Informationen verwendest:

1. Wenn man eine Zahl quadriert, ist das Vorzeichen des Ergebnisses immer positiv. Man kann also uneingeschränkt $x^2 = |x|^2$ setzen.
2. Die Rechenregel bei Logarithmen lautet: $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$
3. In der Aufgabenstellung ist der folgende Grenzwert angegeben: $\lim\limits_{x\to 0} (x \cdot \ln(|x|)) = 0$

2.1 ▶ **Parameterwerte für abgebildete Graphen bestimmen** (3P)

Die gesuchten Parameter für die abgebildeten Graphen lassen sich anhand der Nullstellen der zugehörigen Funktionen bestimmen. Betrachte die Funktionsgleichung von f_a für $x \neq 0$:

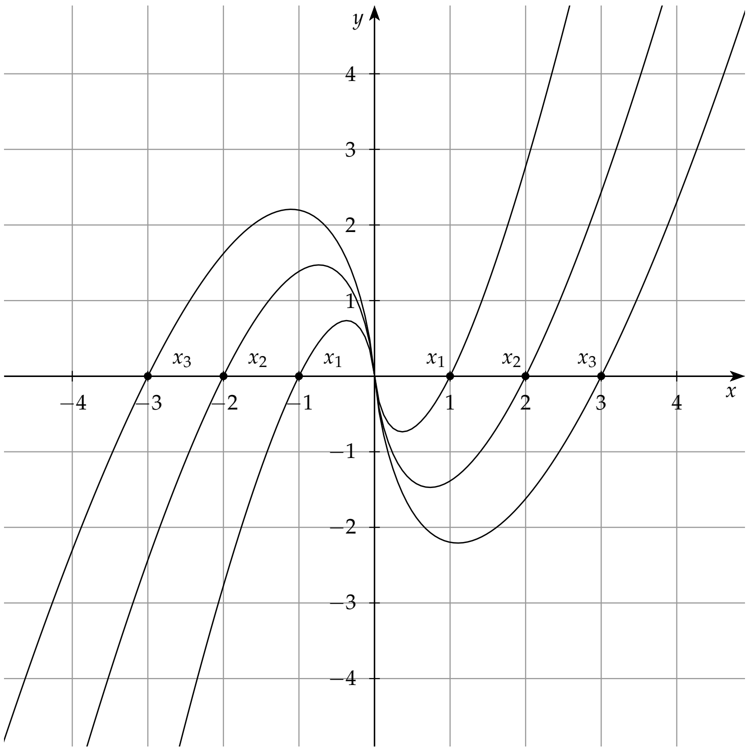
Der Funktionsterm von f_a kann nur dann Null werden, wenn der natürliche Logarithmus Null wird. Der natürliche Logarithmus wird wiederum nur dann Null, wenn sein Argument gleich 1 ist, d.h.: $\ln(1) = 0$. In unserem Fall ist das Argument des Logarithmus gerade „$\frac{x^2}{a}$“. Dieser Ausdruck muss für die die Nullstellen 1 ergeben, d.h.:

$\frac{x^2}{a} = 1$

Aufgelöst nach a ergibt sich:

$a = x^2$

Nun beobachten wir für jede Kurve zwei Nullstellen, die nicht im Ursprung liegen, jeweils bei $x_1 = \pm 1,\ x_2 = \pm 2$ und $x_3 = \pm 3$:



2.2 ► **Parameter *a* bestimmen** (8P)

Um eine Funktion mit einem Parameter zu bestimmen, wird genau eine Bedingung benötigt. Diese ist hier durch den Punkt $E(1 \mid 1)$ gegeben. Eingesetzt in die Funktionsgleichung von f_a für $x \neq 0$ ergibt sich eine Gleichung mit einer Unbekannten, die sich nach a auflösen lässt.

Die Gleichung lautet demnach:

$$f_a(1) = 1 = 1 \cdot \ln\left(\frac{1^2}{a}\right)$$

Du kannst die Gleichung nun nach a auflösen, indem du die linke und die rechte Seite der Gleichung jeweils zum Exponenten der e-Funktion machst. Dadurch erhältst du einen Term der Form $\mathrm{e}^{\ln(x)}$, der sich zu x vereinfacht. Das funktioniert, weil $\mathrm{e}(x)$ die Umkehrfunktion zu $\ln(x)$ ist.

► **Zeigen, dass durch jeden Punkt nur eine Kurve verläuft**

Allgemein gilt: Wenn es nur einen Parameter a gibt, sodass der Graph der zugehörigen Funktion f_a durch einen Punkt $P(p \mid q)$ verläuft, so verläuft genau ein Graph der Schar durch diesen Punkt. Bestimme nun allgemein den Parameter a so, dass der Graph von f_a durch den Punkt P verläuft und zeige durch die Rechnung, dass es nur genau einen solchen Wert a gibt:

Setze auch hier wieder die Koordinaten in die Funktionsgleichung für $x \neq 0$ ein und löse wie zuvor nach a auf. Teile zunächst durch p und wende wieder an, dass $\mathrm{e}(x)$ die Umkehrfunktion zu $\ln(x)$ ist.

2.3 ▶ Zeigen, dass der Graph von f_a genau zwei Extrempunkte besitzt und Ortskurve bestimmen (10P)

Gesucht sind die Extrempunkte der Graphen der Funktionenschar f_a und die Gleichung der zugehörigen Ortskurve h.

Die notwendige und hinreichende Bedingungen für eine Extremstelle einer Funktion f_a bei x_E sind:

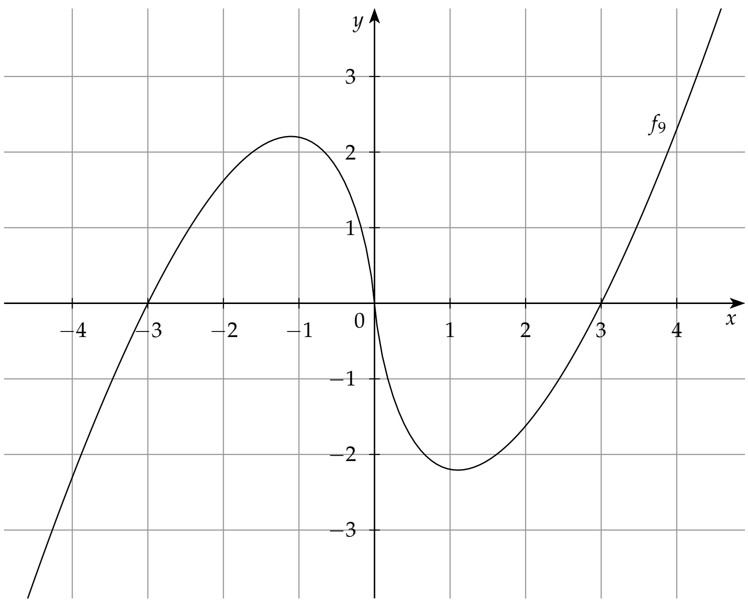
1. Die erste Ableitung f_a' ist gleich Null: $f_a'(x_E) = 0$.
2. Die zweite Ableitung f_a'' ist ungleich Null: $f_a''(x_E) \neq 0$.

Bilde also zunächst die erste und zweite Ableitungen von f_a, setze die erste Ableitung gleich Null und ermittle mögliche Extremstellen. Prüfe dann mit der hinreichenden Bedingung, ob sie tatsächlich Extremstellen darstellen. Im Anschluss kannst du anhand der Koordinaten der Extrempunkte ein Gleichung der Ortskurven h bestimmen.

Du kannst die Ortskurven der Extrempunkte bestimmen, indem du zunächst die x-Koordinate eines Extrempunkts nach a auflöst und das Ergebnis anschließend in die y-Koordinate einsetzt.

2.4 ▶ Inhalt der eingeschlossenen Fläche berechnen (7P)

Das Integral über eine Funktion f_a in den Grenzen $[a, b]$ kann als orientierter Flächeninhalt der Fläche interpretiert werden, welche der der Graph von f_a mit der x-Achse und den Parallelen zur y-Achse bei a und b einschließt. Der Graph von f_9 sieht analog zu Material vier wie folgt aus:



Du kannst nun alle Nullstellen von f_9 bestimmen und anschließend abschnittsweise über die Intervalle integrieren, die geschlossene Flächen mit der x-Achse bilden.