a) **▶ Wahrscheinlichkeiten berechnen** (8P)

Im Aufgabenteil a) wird jeweils eine Stichprobe von EU-Bürgern bzw. von Bundesbürgern betrachtet und es wird nach der Wahrscheinlichkeit dafür gesucht, dass eine bestimmte Anzahl von ihnen „Sportmuffel" sind. Aus dem Einleitungstext zur Aufgabe weißt du, dass

- jeder EU-Bürger mit einer Wahrscheinlichkeit von 39 % ein „Sportmuffel" ist,
- jeder Bundesbürger mit einer Wahrscheinlichkeit von 31 % ein „Sportmuffel" ist.

Die Anzahl der „Sportmuffel" in den jeweiligen Stichproben kann also je durch eine **binomialverteilte** Zufallsgröße beschrieben werden.

**Ereignis A**:

Zunächst wird eine Gruppe von 50 zufällig ausgewählten EU-Bürgern betrachtet. Sei $X_1$ die Zufallsgröße, welche die Anzahl der „Sportmuffel" in dieser Gruppe beschreibt. $X_1$ kann als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 50$ und $p = 0,39$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich genau 19 „Sportmuffel" in der Gruppe befinden. Dies ist die Wahrscheinlichkeit $P(X_1 = 19)$.

$$\begin{aligned} P(X_1 = 19) &= \binom{50}{19} \cdot 0,39^{19} \cdot (1-0,39)^{50-19} \\ &= \binom{50}{19} \cdot 0,39^{19} \cdot 0,61^{31} \approx 0,1144 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 11,44 % befinden sich unter 50 EU-Bürgern genau 19 „Sportmuffel".

**Ereignis B**:

Nun wird eine Gruppe von 15 zufällig ausgewählten Bundesbürgern betrachtet. Sei $X_2$ die Zufallsgröße, welche die Anzahl der „Sportmuffel" in dieser Gruppe beschreibt. $X_2$ kann als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 15$ und $p = 0,31$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich höchstens 2 „Sportmuffel" in der Gruppe befinden. Dies ist die Wahrscheinlichkeit $P(X_2 \leq 2)$.

$$\begin{aligned} P(X_2 \leq 2) &= P(X_2 = 0) + P(X_2 = 1) + P(X_2 = 2) \\ &= \binom{15}{0} \cdot 0,31^0 \cdot (1-0,31)^{15-0} + \binom{15}{1} \cdot 0,31^1 \cdot (1-0,31)^{15-1} + \binom{15}{2} \cdot 0,31^2 \cdot (1-0,31)^{15-2} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 0,69^{15} + 15 \cdot 0,31 \cdot 0,69^{14} + 105 \cdot 0,31^2 \cdot 0,69^{13} \\ &= 0,1107 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 11,07 % befinden sich unter 15 Bundesbürgern höchstens 2 „Sportmuffel".

b) **▶ Anteil der zu erwartenden „Sportmuffel" berechnen** (3P)

Betrachtet wird eine Gruppe von 100 Bundesbürgern. Du weißt, dass jeder dieser Bundesbürger mit einer Wahrscheinlichkeit von 31 % ein „Sportmuffel" ist. Sei $Y$ die Zufallsgröße, welche die Anzahl der „Sportmuffel" in dieser Gruppe beschreibt. Wie bereits in a) kann diese Zufallsgröße als binomialverteilt angenommen werden. Die Parameter für die Binomialverteilung sind dieses Mal $n = 100$ und $p = 0,31$.

Gefragt ist zunächst nach der Anzahl der „Sportmuffel", die man erwarten kann, d.h. nach dem **Erwartungswert** von $Y$:

$E(Y) = n \cdot p = 100 \cdot 0,31 = 31$

Man kann 31 „Sportmuffel" erwarten.

▶ **Wahrscheinlichkeit berechnen**

Du weißt, dass sich in der Gruppe erwartungsgemäß 31 „Sportmuffel" befinden. Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass tatsächlich genau so viele „Sportmuffel" in der Gruppe sind. Dies ist die Wahrscheinlichkeit $P(Y = 31)$:

$$P(Y = 31) = \binom{100}{31} \cdot 0,31^{31} \cdot 0,69^{69} \approx 0,086$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 8,6 % befinden sich in der Gruppe genau so viele „Sportmuffel" wie zu erwarten sind.

c) ▶ **Wahrscheinlichkeit für einen Mann berechnen** (9P)

Du weißt aus der Aufgabenstellung, dass:

- eine zufällig ausgewählte Person mit einer Wahrscheinlichkeit von 48,4 % ein Mann ist,
- eine zufällig ausgewählte Person mit einer Wahrscheinlichkeit von 13 % Sport in einem Verein treibt und
- ein zufällig ausgewählter **Mann** mit einer Wahrscheinlichkeit von 21 % Sport in einem Verein treibt.
- Also folgt mit der Pfadregel, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,484 \cdot 0,21 \approx 0,102$ eine Person ein Mann ist **und** in einem Verein Sport treibt.

Sei $M$ das Ereignis „Eine Person ist ein Mann" und $V$ das Ereignis „Eine Person treibt Sport in einem Verein" und seien $\overline{M}$ und $\overline{V}$ die zugehörigen Gegenereignisse. Dann kannst du die Informationen aus dem Aufgabentext so formulieren:

- $P(M) = 0,484$ und somit $P(\overline{M}) = 1 - 0,484 = 0,516$,
- $P(V) = 0,13$ und somit $P(\overline{V}) = 1 - 0,13 = 0,87$,
- $P(M \cap V) = 0,484 \cdot 0,21 \approx 0,102$

Gesucht ist die nun Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person, die Sport in einem Verein treibt, ein Mann ist. Anders formuliert: Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person ein Mann ist, **unter der Bedingung**, dass sie in einem Verein Sport treibt. Dies ist eine **bedingte Wahrscheinlichkeit**, wobei $V$ die Bedingung ist. In Formeln:
$P_V(M)$
Berechne diese Wahrscheinlichkeit mit der Formel zur bedingten Wahrscheinlichkeit (Satz von Bayes):

$$\begin{aligned} P_V(M) &= \frac{P(V \cap M)}{P(V)} \\ &= \frac{P(M \cap V)}{P(V)} \\ &= \frac{0,484 \cdot 0,21}{0,13} \approx 0,7818 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 78,18 % ist eine Person, die in einem Verein Sport treibt, ein Mann.

**► Wahrscheinlichkeit für ein Vereinsmitglied berechnen**

Die parallele Formulierung der Aufgabenstellung legt nahe, dass auch hier eine bedingte Wahrscheinlichkeit zu berechnen ist. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person ein Vereinsmitglied ist, **unter der Bedingung**, dass sie eine Frau ist. Wenn du die Bezeichnungen der Ereignisse $M$ und $V$ von oben verwendest, so kannst du diese bedingte Wahrscheinlichkeit formulieren als:

$P_{\overline{M}}(V)$.

Mit der Formel zur bedingten Wahrscheinlichkeit (Satz von Bayes) ergibt sich dann:

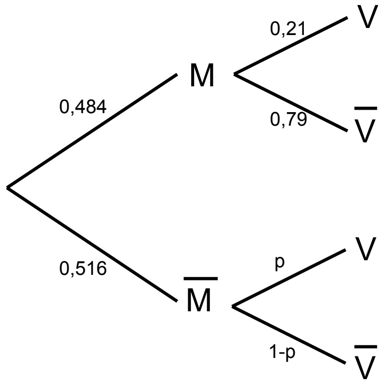
$$P_{\overline{M}}(V) = \frac{P(\overline{M} \cap V)}{(\overline{M})}$$

Du kennst zwar die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{M}) = 0,516$, allerdings ist $P(\overline{M} \cap V)$ noch unbekannt. Du kannst so vorgehen:

- Berechne die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{M} \cap V)$ beispielsweise über ein **Baumdiagramm.**
- Setze anschließend $P(\overline{M} \cap V)$ und $P(\overline{M})$ in die obige Formel ein und berechne die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

**1. Schritt: $P(\overline{M} \cap V)$ berechnen**

Stelle die in der Aufgabenstellung gegebenen Informationen in einem Baumdiagramm dar:




Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{M} \cap V)$. Du weißt, dass gilt: $P(V) = 0,13$. Im Baumdiagramm kannst du erkennen, dass sich diese Wahrscheinlichkeit zusammensetzt aus $P(M \cap V)$ und $P(\overline{M} \cap V)$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} P(V) &= P(M \cap V) + P(\overline{M} \cap V) \\ 0,13 &= 0,484 \cdot 0,21 + P(\overline{M} \cap V) \\ 0,13 &= 0,102 + P(\overline{M} \cap V) \qquad \mid -0,102 \\ 0,028 &= P(\overline{M} \cap V) \end{aligned}$$

Es folgt: $P(\overline{M} \cap V) \approx 0,028$.

**2. Schritt: Wahrscheinlichkeiten in obige Formel einsetzen**

Setze diese Wahrscheinlichkeit oben in die Formel zur bedingten Wahrscheinlichkeit ein:

$$\begin{aligned} P_{\overline{M}}(V) &= \frac{P(\overline{M} \cap V)}{P(\overline{M})} \\ &= \frac{0,028}{0,516} \approx 0,0542 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 5,42 % treibt eine Person, die eine Frau ist, Sport in einem Verein.

d) ▶ **Kleinste mögliche Zahl $m$ bestimmen** (6P)

Die Frau schießt 150 Strafstöße und hat eine Trefferquote von 85 %. Das heißt, dass jeder ihrer Schüsse mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 % ein Treffer ist. Die Anzahl ihrer Treffer kannst du also durch eine **binomialverteilte** Zufallsgröße beschreiben, wir nennen sie $Z$. Die Parameter für die Binomialverteilung sind dann $n = 150$ und $p = 0,85$.

Ein Fan $F$ wettet nun mit Fan $G$, dass die Frau **höchstens $m$** Treffer landet. Er gewinnt, wenn die Frau dann tatsächlich höchstens $m$ Treffer schießt. Seine Gewinnwahrscheinlichkeit ist also $P(Z \leq m)$. Die Frage ist nun: Wie muss die Zahl $m$ gewählt werden, damit Fan $F$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 70 % gewinnt? Anders formuliert: Bestimme $m$ so, dass gilt: $P(Z \leq m) \geq 0,7$.

Du kannst so vorgehen:

- Aufgrund des relativ großen Stichprobenumfangs kann die binomialverteilte Zufallsgröße $Z$ durch eine **normalverteilte Zufallsgröße** angenähert werden. Dies ist aber nur der Fall, wenn für die Standardabweichung $\sigma$ von $Z$ gilt: $\sigma > 3$.
- Berechne die Standardabweichung $\sigma$ und den Erwartungswert $\mu$ von $Z$ und untersuche, ob diese Bedingung erfüllt ist.
- Wenn ja, so kannst du die Wahrscheinlichkeit $P(Z \leq m)$ mit Hilfe der Normalverteilung berechnen und diese Ungleichung mit Hilfe einer Tabelle zur Standardnormalverteilung auflösen.

**1. Schritt: Erwartungswert und Standardabweichung von $Z$ berechnen**

$$\begin{aligned} \mu &= n \cdot p \\ &= 150 \cdot 0,85 = 127,5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sigma &= \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \\ &= \sqrt{150 \cdot 0,85 \cdot 0,15} \approx 4,37 \end{aligned}$$

Weil $\sigma = 4,37 > 3$ ist, ist die Annäherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung zulässig.

**2. Schritt: Wahrscheinlichkeit $P(Z \leq m)$ berechnen und Ungleichung lösen**

$$\begin{aligned} P(Z \leq m) &\geq 0,7 \\ \Phi\left(\frac{m - \mu + 0,5}{\sigma}\right) &\geq 0,7 \\ \Phi\left(\frac{m - 127,5 + 0,5}{4,37}\right) &\geq 0,7 \\ \Phi\left(\frac{m - 127}{4,37}\right) &\geq 0,7 \end{aligned}$$

Betrachte nun eine Tabelle zur Standardnormalverteilung und suche nach dem Wert, für den die $\Phi$-Funktion erstmals **größer oder gleich** 0,7 wird. Du findest den Wert $\Phi(0,53) = 0,7019$. Damit folgt weiter:

$$\begin{aligned} \frac{m-127}{4,37} &\geq 0,53 \qquad &| \cdot 4,37 \\ m-127 &\geq 2,32 \qquad &| +127 \\ m &\geq 129,32 \end{aligned}$$

Damit weißt du: Die kleinste mögliche Zahl für $m$ ist $m = 130$. Fan $F$ muss auf mindestens 130 verwandelte Strafstöße tippen, damit er die Wette mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 70 % gewinnt.

e) ► **Mindestanzahl der auszuwählenden Fans bestimmen** (4P)

In diesem Aufgabenteil ist wieder von „Sportmuffeln" die Rede, allerdings kannst du die Wahrscheinlichkeiten aus den früheren Aufgabenteilen dieses Mal **nicht** verwenden. Es ist nämlich bekannt, dass sich in einer Gruppe von 50 Personen **genau ein** „Sportmuffel" befindet. Aus dieser Gruppe werden nun nacheinander $k$ Personen „ohne Zurücklegen" ausgewählt. Gefragt ist: Wie viele Personen müssen ausgewählt werden, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 85 % den „Sportmuffel" auswählt.

Überlege, was das genau bedeutet:

- Insgesamt gibt es 49 „Sportler" und 1 „Sportmuffel".
- Insgesamt werden $k$ Fans „ohne Zurücklegen" gezogen.
- Betrachtet wird die Situation, dass der „Sportmuffel" unter den gezogenen Fans ist. Es soll also **1 von 1** „Sportmuffeln" und $\boldsymbol{k-1}$ **von 49** Sportlern gezogen werden, wobei insgesamt $\boldsymbol{k}$ **aus 50** Fans gezogen werden.

Du kannst die zugehörige Wahrscheinlichkeit $P$(„Sportmuffel" wird gezogen") über die **hypergeometrische Verteilung** berechnen. Berechne sie zunächst in Abhängigkeit von $k$ und vereinfache so weit wie möglich. Bestimme $k$ dann so, dass die Wahrscheinlichkeit **größer als 85 %** wird.

Dabei kann dir die Definition des **Binomialkoeffizienten** und der Fakultät hilfreich sein:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}; \qquad k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} &P(\text{„Sportmuffel" wird gezogen}) \\ &= \frac{\binom{49}{k-1} \cdot \binom{1}{1}}{\binom{50}{k}} \\ &= \frac{\frac{49!}{(k-1)! \cdot (49-(k-1))!} \cdot 1}{\frac{50!}{k! \cdot (50-k)!}} \\ &= \frac{\frac{49!}{(k-1)! \cdot (49-k+1)!}}{\frac{50!}{k! \cdot (50-k)!}} \end{aligned}$$

$$=\frac{\frac{49!}{(k-1)!\cdot(50-k)!}}{\frac{50!}{k!\cdot(50-k)!}}$$
$$=\frac{49!}{(k-1)!\cdot(50-k)!}\cdot\frac{1}{\frac{50!}{k!\cdot(50-k)!}}$$
$$=\frac{49!}{(k-1)!\cdot\cancel{(50-k)!}}\cdot\frac{k!\cdot\cancel{(50-k)!}}{50!}$$
$$=\frac{49!}{(k-1)!}\cdot\frac{k!}{50!} \qquad |\ 50!=50\cdot 49\cdot 48\cdot\ldots\cdot 1=50\cdot 49!$$
$$=\frac{\cancel{49!}}{(k-1)!}\cdot\frac{k!}{50\cdot\cancel{49!}}$$
$$=\frac{1}{(k-1)!}\cdot\frac{k!}{50} \qquad |\ k!=k\cdot(k-1)\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1=k\cdot(k-1)!$$
$$=\frac{1}{\cancel{(k-1)!}}\cdot\frac{k\cdot\cancel{(k-1)!}}{50}$$
$$=\frac{k}{50}$$

Zuletzt erhältst du also: $P(\text{„Sportmuffel“ wird gezogen})=\frac{k}{50}$. Diese Wahrscheinlichkeit soll **größer als 85 %** sein. Das heißt:

$$\frac{k}{50}>0{,}85 \qquad |\ \cdot 50$$
$$k>42{,}5$$

Es müssen mindestens 43 der Fans ausgewählt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 85 % der „Sportmuffel“ unter den ausgewählten Fans ist.