a) ► **Änderungsrate nach zwei Stunden berechnen** (15P)

Laut Aufgabenstellung gibt x die Zeit in Stunden und $f(x)$ die Änderungsrate der Wassermenge im Becken in Kubikmeter pro Stunde an. Die Änderungsrate nach zwei Stunden ist also gerade der Funktionswert $f(2)$.

$$f(2) = 0,2 \cdot 2^3 - 2,1 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 = 3,2$$

Nach zwei Stunden beträgt die Änderungsrate 3,2 Kubikmeter pro Stunde.

► **Integral berechnen und Lösungsweg dokumentieren**

Du sollst den Integralterm berechnen, ohne deinen GTR zu verwenden. Nutze also den **Hauptsatz der Integralrechnung** und bilde hierzu eine **Stammfunktion** von f.

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \left(0,2x^3 - 2,1x^2 + 5x\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[0,2 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^4 - 2,1 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2\right]_0^2 \\
&= \left[0,05x^4 - 0,7x^3 + 2,5x^2\right]_0^2 \\
&= \left(0,05 \cdot 2^4 - 0,7 \cdot 2^3 + 2,5 \cdot 2^2\right) - \left(0,05 \cdot 0^4 - 0,7 \cdot 0^3 + 2,5 \cdot 0^2\right) \\
&= (0,05 \cdot 16 - 0,7 \cdot 8 + 2,5 \cdot 4) - 0 \\
&= 0,8 - 5,6 + 10 \\
&= 5,2
\end{aligned}$$

► **Ergebnis interpretieren**

Die Funktion f gibt dir die **Änderungsrate** des Wassers im Becken an. Also gibt dir das **Integral** von 0 bis 2 über $f(x)$ die **Menge an Wasser** an, die in diesen zwei Stunden **insgesamt zugeflossen** ist. Laut Aufgabenstellung war das Becken zu Beginn ($x = 0$) leer.

Du kannst also sagen: nach zwei Stunden befinden sich 5,2 Kubikmeter Wasser im Becken.

► **Aussage über den Wasserstand begründen**

Zu begründen ist die Aussage, dass sich nur zu Beginn kein Wasser im Becken befindet. Anders formuliert: du sollst zeigen, dass das Becken für $x > 0$ **nie** ganz leer wird. Betrachte hierzu den Graphen von f und behalte im Hinterkopf, dass f die **Änderungsrate** des Wassers im Becken angibt.

Zwischen $x = 0$ und $x \approx 3,6$ verläuft der Graph von f oberhalb der x-Achse, d.h. $f(x) > 0$. In dieser Zeit **steigt** das Wasser im Becken, weil die Änderungsrate **positiv** ist. Es fließt Wasser zu.

Zwischen $x = 3,6$ und $x \approx 7$ verläuft der Graph von f unterhalb der x-Achse, d.h. $f(x) < 0$. In dieser Zeit **fällt** das Wasser im Becken, weil die Änderungsrate **negativ** ist.

Wasser fließt ab.

Ab $x \approx 7$ fließt wieder Wasser zu.

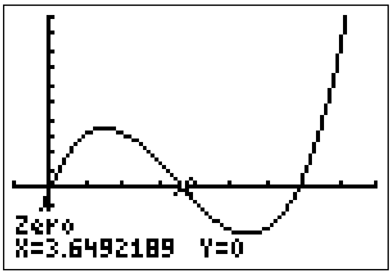
Das Becken wird leer, wenn genauso viel Wasser **abläuft** wie **zuläuft**. Die Menge an ablaufendem bzw. zulaufendem Wasser wird wieder durch die **Fläche** zwischen dem Graphen und der x-Achse dargestellt.

Es ist deutlich zu erkennen, dass die erste Fläche, die oberhalb der x-Achse liegt, mit etwa 7 FE (Kästchen) **größer** als die zweite Fläche ist, die unterhalb der x-Achse liegt und nur etwa 6 FE (Kästchen) groß ist. Es kann also nicht das ganze Wasser im Becken wieder abgeflossen sein. Nach 7 Stunden ist das Becken somit **nicht ganz leer**. Anschließend fließt wieder Wasser zu.

▶ Zeitlichen Anteil in Prozent berechnen

Die Wassermenge nimmt ab, wenn der Graph von f unterhalb der x-Achse verläuft. Eben haben wir die Zeitpunkte, die diesen Zeitraum begrenzen, mit $x = 3,6$ und $x = 7$ **geschätzt**. Nun gilt es, sie exakt zu berechnen. Anschließend bestimmst du den prozentualen Anteil, den diese Zeitspanne an den gesamten 8 Stunden hat.

Der Zeitraum, in dem der Graph von f unterhalb der x-Achse verläuft, wird durch die **Nullstellen** von f begrenzt.
Zeichne den Graphen von f im Intervall $[0;8]$ und bestimme mit `2nd → TRACE (CALC) → Zero` die Nullstellen von f.



Der GTR liefert die Nullstellen $x_1 \approx 3,65$ und $x_2 \approx 6,85$. Für die Länge des Zeitraums, in dem die Wassermenge abnimmt, folgt so:

$6,85 - 3,65 = 3,2$

Innerhalb der ersten 8 Stunden nimmt die Wassermenge in 3,2 Stunden ab. **Prozentual** entspricht dies einem Anteil von:

$\frac{3,2}{8} = 0,4 = 40\,\%$

Innerhalb der ersten 8 Stunden nimmt die Wassermenge in 40 % der Zeit ab.

b) **▶ Zweiten Zeitpunkt mit halber Füllung des Beckens bestimmen** (15P)

Aus der Aufgabenstellung kennst du die **Maße** des Beckens und kannst so sein **Volumen** V berechnen:

$V = \text{Länge} \cdot \text{Breite} \cdot \text{Höhe} = 3\,\text{m} \cdot 2\,\text{m} \cdot 2\,\text{m} = 12\,\text{m}^3$

Insgesamt fasst das Becken $12\,\text{m}^3$ Wasser; wenn es halb gefüllt ist, enthält es also $6\,\text{m}^3$. Gesucht ist nun der Zeitpunkt, zu dem der Wasserstand im Becken **zum zweiten Mal** $6\,\text{m}^3$ beträgt.

Im Aufgabenteil a) hast du mit $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ den Wasserstand im Becken nach zwei Stunden berechnet. Nun ist der Wasserstand bekannt, aber die vergangene Zeit nicht. Diese Zeit t findest du in der **oberen Integralgrenze**. Gesucht ist also die (zweite) Lösung der Gleichung:

$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = 6$$

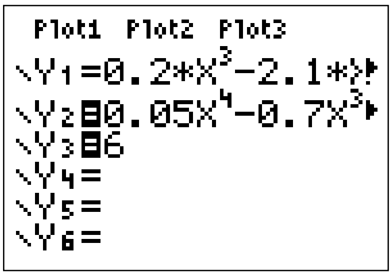
Diese Gleichung kannst du über den **Hauptsatz der Integralrechnung** oder mit Hilfe des **GTR** lösen.

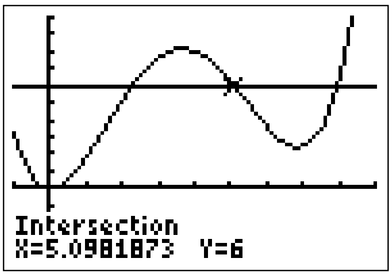
▶▶ Lösungsweg A: Hauptsatz der Integralrechnung

Verwende hierzu wie oben den Hauptsatz der Integralrechnung. Die Stammfunktion übernehmen wir von oben.

$$\begin{aligned}
\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x &= 6\\
\left[0,05x^4 - 0,7x^3 + 2,5x^2\right]_0^t &= 6\\
\left(0,05t^4 - 0,7t^3 + 2,5t^2\right) - \left(0,05\cdot 0^4 - 0,7\cdot 0^3 + 2,5\cdot 0^2\right) &= 6\\
0,05t^4 - 0,7t^3 + 2,5t^2 &= 6
\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist von Hand nicht lösbar. Löse sie also grafisch mit deinem Rechner. Fasse dazu die Terme links und rechts vom Gleichheitszeichen als **Funktionsterme** auf und trage sie im `Y=`-Menü ein. Zeichne dann die zugehörigen Graphen und bestimme deren **zweiten Schnittpunkt** mit dem Befehl `2nd → TRACE (CALC) → intersect`.





Der GTR liefert die Stelle $x \approx 5,1$. Nach etwa 5,1 Stunden ist das Becken zum zweiten Mal halb mit Wasser gefüllt.

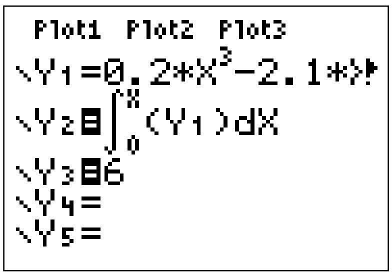
▶▶ Lösungsweg B: Lösung mit dem GTR

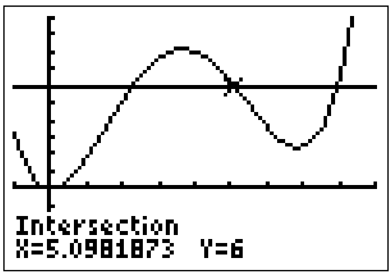
Der GTR besitzt die Funktion `MATH → fnInt`. Mit ihrer Hilfe kannst du einerseits Integrale berechnen, andererseits im `GRAPH`-Modus aber auch den Graphen einer **Stammfunktion** zeichnen.

Wir wollen folgende Gleichung lösen: $\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Dabei haben wir die Funktion f unter `Y1` gespeichert.

Die linke Seite der Gleichung kannst du im GTR so ausdrücken: $\boxed{\int_0^X \texttt{Y1}\,\mathrm{d}X}$. Die Variable `Y1` erhältst du dabei unter `VARS → Y-VARS → Function`.

Zeichne so den Graphen dieser Stammfunktion sowie die Gerade mit $y = 6$ und bestimme mit `2nd → TRACE (CALC) → Intersect` die **zweite Schnittstelle**.





Hinweis: Es dauert leider relativ lang, bis der GTR den Graphen der Stammfunktion gezeichnet hat.

Der GTR liefert die Stelle $x \approx 5,1$. Nach etwa 5,1 Stunden ist das Becken zum zweiten Mal halb mit Wasser gefüllt.

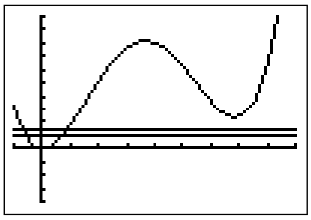
▶ Wassermengen ermitteln, die dreimal angenommen werden

Wir wollen die Funktion, welche die **Wassermenge** im Becken beschreibt, mit F bezeichnen. Sie hat den Funktionsterm

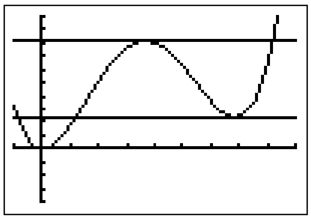
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0,05x^4 - 0,7x^3 + 2,5x^2$$

und ist eine **Stammfunktion** von f, für die gilt: $F(0) = 0$.

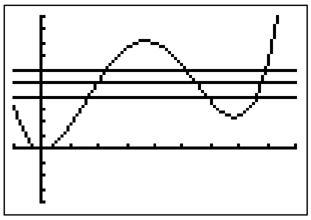
Du erkennst im GTR, dass der Graph von F einen Hochpunkt und einen Tiefpunkt besitzt. Die y-Koordinaten von Hoch- und Tiefpunkt unterteilen die Wertemenge der Funktion in drei Bereiche:



Die Funktionswerte, die **kleiner** sind als die y-Koordinate des Tiefpunkts, in diesem Fall $y = 1$ und $y = 1,5$, werden nur **genau einmal** angenommen.
Dasselbe gilt für die Funktionswerte, die **größer** sind als die y-Koordinate des Hochpunkts, doch diese werden im Intervall $[0;8]$ nicht angenommen.



Die Funktionswerte, die **gleich** der y-Koordinate des Tiefpunkts bzw. des Hochpunkts sind, werden **genau zweimal** angenommen:
Einmal im Extrempunkt selbst und einmal in einem der Äste des Graphen.

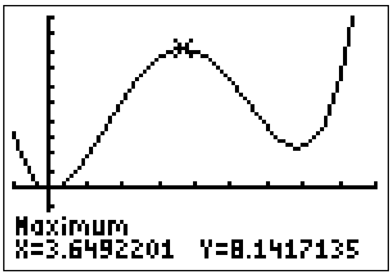


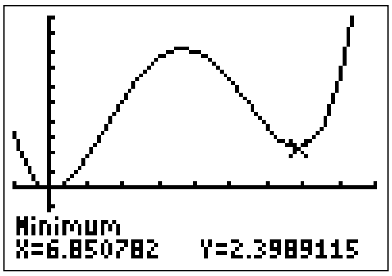
Zuletzt werden die Funktionswerte, die **kleiner** als die y-Koordinate des Hochpunkts, aber **größer** als die y-Koordinate des Tiefpunkts sind, **genau dreimal** angenommen, in diesem Fall z.B. die Werte $y = 5$, $y = 6$ und $y = 7$.

Du kannst also so vorgehen:

- Berechne mit dem GTR die Koordinaten des Hochpunkts und des Tiefpunkts des Graphen von F.
- Gesucht sind die Werte, die dreimal angenommen werden. Sie liegen genau im Intervall auf der y-Achse, das von Hoch- und Tiefpunkt begrenzt wird.

Die Koordinaten von Hoch- und Tiefpunkt erhältst du über `2nd → TRACE (CALC) → maximum` bzw. `...minimum`.





Die y-Koordinate von Hoch- und Tiefpunkt schließen das Intervall $[2,3989\,;\,8,1417]$ ein. Alle Wassermengen, die zwischen diesen beiden Werten liegen, werden zu drei Zeitpunkten angenommen.

► Maximale Höhe des Wasserstandes berechnen

F gibt dir die **Wassermenge** im Becken in Abhängigkeit von der Zeit an. Gesucht ist die maximale Wasserhöhe. Um sie zu berechnen, benötigst du zunächst die **maximale Wassermenge**, die sich innerhalb der ersten 8 Stunden im Becken befindet.

Du hast gerade die Koordinaten des Hochpunktes $H\,(3,65 \mid 8,14)$ des Graphen von F bestimmt. Da F aber im Intervall $[0;8]$ betrachtet wird, können auch **Randextrema** auftreten.

- Untersuche also $F(0)$ und $F(8)$ und vergleiche die Werte mit der y-Koordinate des Hochpunkts. Entscheide so, welches die maximale Wassermenge im Becken in den ersten 8 Stunden ist.

- Gesucht ist dann die zugehörige **Füllhöhe** des Beckens. Verwende hierzu die Maßangaben aus der Aufgabenstellung: Die Wassersäule im Becken hat die Form eines Quaders mit Länge 3 m, Breite 2 m unbekannter Höhe h. Berechne über die Volumenformel für Quader die Höhe h.

1. Schritt: Maximale Wassermenge ermitteln

$$\begin{aligned}
F(x) &= 0,05x^4 - 0,7x^3 + 2,5x^2 \\
F(0) &= 0,05 \cdot 0^4 - 0,7 \cdot 0^3 + 2,5 \cdot 0^2 \\
&= 0 \\
F(3,65) &= 8,14 \\
F(8) &= 0,05 \cdot 8^4 - 0,7 \cdot 8^3 + 2,5 \cdot 8^2 \\
&= 6,4
\end{aligned}$$

Also wird der maximale Wasserstand zum Zeitpunkt $3,65$ mit einem Volumen von etwa $8{,}14\,\text{m}^3$ angenommen.

2. Schritt: Maximale Wasserhöhe berechnen

Das Becken und damit auch die Wassersäule sind 3 m lang und 2 m breit. Unbekannt ist die Höhe h der Wassersäule. Für das Volumen des Wassers gilt also: $V(h) = 3\,\text{m} \cdot 2\,\text{m} \cdot h$.
Setze nun $V(h) = 8,14\,\text{m}^3$ und löse nach h auf:

$$\begin{aligned}
3\,\text{m} \cdot 2\,\text{m} \cdot h &= 8,14\,\text{m}^3 \\
6\,\text{m}^2 \cdot h &= 8,14\,\text{m}^3 \qquad \mid : (6\,\text{m}^2) \\
h &= 1,36\,\text{m}
\end{aligned}$$

Die maximale Höhe des Wasserstandes beläuft sich innerhalb der ersten 8 Stunden auf etwa 1,36 m.

c) **▶ Stetigkeit und Differenzierbarkeit am Übergang nachweisen** (16P)

Die Funktion h ist an der Übergangsstelle $x = 2,5$ stetig und differenzierbar, wenn gilt:

- Stetig: $f(2,5) = g(2,5)$
- Differenzierbar: $f'(2,5) = g'(2,5)$

1. Schritt: Stetigkeit zeigen

Berechne die Funktionswerte beider Funktionen:

$$\begin{aligned} f(2,5) &= 0,2 \cdot 2,5^3 - 2,1 \cdot 2,5^2 + 5 \cdot 2,5 \\ &= 2,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(2,5) &= 2,5 \cdot \mathrm{e}^{1,75-0,7\cdot 2,5} \\ &= 2,5 \cdot \mathrm{e}^{1,75-1,75} = 2,5 \cdot \mathrm{e}^0 \\ &= 2,5 \end{aligned}$$

2. Schritt: Differenzierbarkeit

Leite f und g zunächst ab. Verwende bei f die Potenzregel und bei g die Kettenregel. Berechne anschließend die Funktionswerte der ersten Ableitung an der Übergangsstelle $x = 2,5$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0,2 \cdot 3x^2 - 2,1 \cdot 2x + 5 \\ &= 0,6x^2 - 4,2x + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(2,5) &= 0,6 \cdot 2,5^2 - 4,2 \cdot 2,5 + 5 \\ &= -1,75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2,5 \cdot (-0,7) \cdot \mathrm{e}^{1,75-0,7x} \\ &= -1,75\mathrm{e}^{1,75-0,7x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(2,5) &= -1,75\mathrm{e}^{1,75-0,7\cdot 2,5} \\ &= -1,75\mathrm{e}^{1,75-1,75} \\ &= -1,75\mathrm{e}^{0} \\ &= -1,75 \end{aligned}$$

Wegen $f(2,5) = g(2,5) = 2,5$ und $f'(2,5) = g'(2,5) = -1,75$ ist die Funktion h an der Übergangsstelle stetig und differenzierbar.

▶ Stammfunktion nachweisen

G ist eine Stammfunktion von g, wenn $G'(x) = g(x)$ ist. Leite also G nach der Kettenregel ab und vergleiche mit $g(x)$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= -\frac{25}{7} \cdot (-0,7) \cdot \mathrm{e}^{1,75-0,7x} \\ &= -\frac{25}{7} \cdot \left(-\frac{7}{10}\right) \mathrm{e}^{1,75-0,7x} \\ &= \frac{25}{7} \cdot \frac{7}{10} \mathrm{e}^{1,75-0,7x} \\ &= \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{2} \mathrm{e}^{1,75-0,7x} \\ &= 2,5\mathrm{e}^{1,75-0,7x} = g(x) \end{aligned}$$

Damit ist nachgewiesen, dass G eine Stammfunktion von g ist.

▶ Untersuchen, ob das Wasserbecken jemals überläuft

Du weißt, dass das Wasserbecken insgesamt $12\,\text{m}^3$ Wasser fasst. Die Funktion h beschreibt wieder die **Änderungsrate** des Wassers im Becken. Die Wassermenge zu einem Zeitpunkt t selbst wird also wieder durch die **Stammfunktion** von H bzw. durch das Integral $\int\limits_0^t h(x)\,\mathrm{d}x$ beschrieben.

Die Frage ist nun: Nimmt dieses Integral jemals einen Wert an, der größer als 12 ist? Du kannst so vorgehen:

- Bestimme zunächst den Term einer Funktion H, welche dir die Wassermenge im Becken angibt.
- Das Wörtchen „jemals“ weist auf eine **Grenzwertbetrachtung** hin. Untersuche also den Grenzwert von $H(x)$ für $x \to \infty$. Ist er kleiner oder gleich 12, so läuft das Becken nie über.

1. Schritt: Funktionsterm von H bestimmen

H gibt die Menge des Wassers im Becken zu einem bestimmten Zeitpunkt x an. Um die Variable x nicht doppelt zu besetzen, verwenden wir für H zunächst die Variable t.
Innerhalb der ersten 2,5 Stunden wird die Entwicklung der Wassermenge im Becken durch die Funktion f beschrieben, anschließend durch die Funktion g. Für den Zeitraum $[0\,;\,2,5]$ gilt für die Wassermenge also:
$\int\limits_0^t f(x)\,\mathrm{d}x.$
Wird ein Zeitpunkt später als nach 2,5 Stunden betrachtet, so muss die Entwicklung aus den ersten 2,5 Stunden aber selbstverständlich auch mit berücksichtigt werden. Die Wassermenge, die nach 2,5 h zu- bzw. abfließt, wird zu der Wassermenge addiert, die nach 2,5 Stunden bereits im Becken vorhanden ist.
Deshalb gilt für H:

$$\begin{aligned}
H(t) &= \int\limits_0^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{2,5}^{t} g(x)\,\mathrm{d}x\\
&= [F(x)]_0^{2,5} + [G(x)]_{2,5}^{t}\\
&= F(2,5) - F(0) + G(t) - G(2,5)
\end{aligned}$$

$F(x) = 0,05x^4 - 0,7x^3 + 2,5x^2; \quad G(x) = -\frac{25}{7}\mathrm{e}^{1,75-0,7x}$

$$\begin{aligned}
&= (0,05\cdot 2,5^4 - 0,7\cdot 2,5^3 + 2,5\cdot 2,5^2) - (0,05\cdot 0^4 - 0,7\cdot 0^3 + 2,5\cdot 0^2) + \left(-\frac{25}{7}\cdot \mathrm{e}^{1,75-0,7\cdot t}\right) - \left(-\frac{25}{7}\cdot \mathrm{e}^{1,75-0,7\cdot 2,5}\right)\\
&= 6,640625 - 0 - \frac{25}{7}\cdot \mathrm{e}^{1,75-0,7\cdot t} + \frac{25}{7}\cdot \mathrm{e}^{0}\\
&= 6,640625 - \frac{25}{7}\cdot \mathrm{e}^{1,75-0,7\cdot t} + \frac{25}{7}\\
&= -\frac{25}{7}\cdot \mathrm{e}^{1,75-0,7\cdot t} + \frac{25}{7} + 6,640625
\end{aligned}$$

2. Schritt: Grenzwert von $H(t)$ berechnen

$H(t) = -\frac{25}{7} \cdot e^{1{,}75-0{,}7\cdot t} + \frac{25}{7} + 6{,}640625$

Wenn t große Werte annimmt, so strebt der **Exponent** $1{,}75 - 0{,}7t$ gegen **Minus Unendlich**. Entsprechend nähert sich der Ausdruck $e^{1{,}75-0{,}7t}$ für große Werte von t der **Null**. Aus diesen Überlegungen folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} H(t) &= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{25}{7}\cdot \underbrace{e^{1{,}75-0{,}7\cdot t}}_{\to 0} + \frac{25}{7} + 6{,}640625\right)\\ &= -\frac{25}{7}\cdot 0 + \frac{25}{7} + 6{,}640625\\ &= \frac{25}{7} + 6{,}640625 \approx 10{,}212\end{aligned}$$

Langfristig nähert sich die Wassermenge im Becken dem Wert 10,21 m^3. Dieser Wert ist kleiner als 12 m^3. Also läuft das Becken nie über.

d) **▶ Identität der Geraden mit einer Tangenten begründen** (14P)

Die Gerade, die durch die Punkte $R(2{,}5 \mid 0)$ und $Q_k(5 \mid f_k(5))$ verläuft, möchten wir g_{RQ} nennen. Diese Gerade ist Tangente im Punkt Q_k, wenn

- Q_k auf der Geraden liegt. Dies ist aber bereits gegeben, weil die Gerade ja durch Q_k verläuft.

und

- Die Steigung der Geraden g_{RQ} mit der Steigung von f_k in diesem Punkt übereinstimmt.

Du kannst also so vorgehen:

- Bestimme zunächst die Steigung der Geraden g_{RQ} durch die Punkte R und Q_k.
- Berechne mit $f_k'(5)$ die **Steigung** von f_k im Punkt Q_k.
- Vergleiche die Steigung von f_k im Punkt Q_k mit der Steigung der Geraden g_{RQ}.

1. Schritt: Geradensteigung bestimmen

Für die Steigung m einer Geraden, welche durch zwei Punkte $P(x_P \mid y_P)$ und $Q\,(x_Q \mid y_Q)$ verläuft, gilt:

$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$

In unserem Fall verläuft die Gerade durch $R\,(2{,}5 \mid 0)$ und $Q\,(5 \mid f_k(5))$. Mit

$f_k(5) = 0{,}2\cdot 5^3 - k\cdot 5^2 + 5\cdot 5 = 25 - 25k + 25 = 50 - 25k$

folgen die vollständigen Koordinaten von $Q\,(5 \mid 50-25k)$. Einsetzen der Koordinaten beider Punkte in die Formel zur Berechnung der Steigung m ergibt:

$m = \frac{50 - 25k - 0}{5 - 2{,}5} = \frac{50-25k}{2{,}5} = 20 - 10k$

2. Schritt: Steigung von f_k im Punkt Q_k berechnen

Die Steigung einer Funktion wird dir immer durch deren erste Ableitung gegeben. Du interessierst dich für die Steigung im Punkt Q_k, also an der Stelle $x = 5$. Bestimme also $f_k'(5)$. Leite dazu f_k zunächst nach der Potenzregel ab.

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= 0,2 \cdot 3x^2 - 2 \cdot k \cdot x + 5 \\ &= 0,6x^2 - 2kx + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_k'(5) &= 0,2 \cdot 3 \cdot 5^2 - 2 \cdot k \cdot 5 + 5 \\ &= 0,6 \cdot 25 - 10k + 5 \\ &= 15 - 10k + 5 \\ &= 20 - 10k \end{aligned}$$

Ein Vergleich zeigt: $m = f_k'(5) = 20 - 10k$. Außerdem verläuft die Gerade g_{RQ} durch den Punkt Q_k. Somit ist gezeigt, dass die Gerade für alle $k > 0$ eine Tangente an den Graphen von f_k im Punkt Q_k ist.

► Existenz der Wendepunkte untersuchen

Sei x_k zunächst die x-Koordinate der Wendepunkte. Sie ist noch unbekannt und muss noch bestimmt werden. Gesucht sind diejenigen Wendepunkte, bei denen die y-Koordinate fünfmal so groß ist wie die x-Koordinate. Es muss also gelten: $y_k = 5 \cdot x_k$.

Zuvor musst du aber die x-Koordinate x_k der Wendepunkte bestimmen. Für sie gilt:

- notwendige Bedingung: $f_k''(x_k) = 0$
- hinreichende Bedingung: $f_k'''(x_k) \neq 0$

Du kannst also so vorgehen:

- Bestimme zunächst die zweite und dritte Ableitung von f_k.
- Löse die Gleichung $f_k''(x) = 0$ und erhalte potentielle Wendestellen.
- Setze diese potentiellen Wendestellen ein in die dritte Ableitung $f_k'''(x)$ und untersuche das hinreichende Kriterium.
- Versuche zuletzt, die Gleichung $y_k = 5 \cdot x_k$ zu lösen. Wenn sie lösbar ist, so gibt es Wendepunkte, bei denen die y-Koordinate fünfmal so groß ist wie die x-Koordinate. Ist sie nicht lösbar, so existieren derartige Wendepunkte nicht.

1. Schritt: Ableitungen bestimmen

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= 0,6x^2 - 2kx + 5 \\ f_k''(x) &= 0,6 \cdot 2x - 2k \\ &= 1,2x - 2k \end{aligned}$$

$$f_k'''(x) = 1,2$$

2. Schritt: Notwendiges und hinreichendes Kriterium prüfen

Setze $f_k''(x) = 0$, um potentielle Wendestellen zu ermitteln:

$$\begin{aligned} 1,2x - 2k &= 0 \qquad \mid +2k \\ 1,2x &= 2k \qquad \mid :1,2 \\ x &= \frac{5}{3}k \end{aligned}$$

Betrachte die dritte Ableitung $f_k'''(x) = 1,2$. Sie ist **immer ungleich Null**. Also ist das hinreichende Kriterium auf jeden Fall erfüllt.

Die x-Koordinate der Wendepunkte lautet deshalb $x_k = \frac{5}{3}k$.

3. Schritt: Gleichung lösen und Existenz untersuchen

Die Frage ist: Ist die Gleichung $y_k = 5 \cdot x_k$ lösbar? y_k ist dir in der Aufgabenstellung gegeben, x_k hast du eben berechnet. Setze beide in die zu untersuchende Gleichung ein und versuche, diese nach k zu lösen.

$$
\begin{aligned}
y_k &= 5 \cdot x_k \\
\frac{25}{3}k - \frac{50}{27}k^3 &= 5 \cdot \frac{5}{3}k \\
\frac{25}{3}k - \frac{50}{27}k^3 &= \frac{25}{3}k \qquad\qquad \left| -\tfrac{25}{3}k \right. \\
-\frac{50}{27}k^3 &= 0
\end{aligned}
$$

Laut Aufgabenstellung ist $k > 0$. Also hat diese Gleichung **keine Lösung**. Entsprechend folgt: Es gibt keine Wendepunkt, deren y-Koordinate fünfmal so groß ist wie die zugehörige x-Koordinate.