

Bei der Aufzucht von Rindern unterscheidet man zwischen Neugeborenen ( $N$ ), einjährigen Kälbern ( $K$ ) und geschlechtsreifen erwachsenen Tieren ( $E$ ), den Kühen und Bullen (mindestens zweijährig). Um eine Rinderherde wirtschaftlich erfolgreich zu betreiben, muss man Kenntnisse über die Anzahl der Geburten, der Todesfälle und der Entnahmen durch Schlachtung oder Verkauf haben. Zudem muss die Verteilung der Herde in den drei Altersstufen ( $N, K, E$ ) bekannt sein. In der hier betrachteten Rinderherde werden die Übergänge zwischen den Altersstufen innerhalb eines Jahres durch die folgende Matrix  $A$  angegeben:

$$\begin{array}{l} \text{von:} \\ \text{nach:} \end{array} \begin{array}{l} N \\ K \\ E \end{array} \quad A = \begin{array}{ccc} N & K & E \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.4 \\ 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

- a) Stellen Sie die Entwicklung der Rinderherde durch einen Übergangsgraphen dar. (10P)  
Beschreiben Sie die biologische Bedeutung des Matrixelementes  $a_{13} = 0,4$  und bestimmen Sie den Anteil der erwachsenen Tiere ( $E$ ), die nach einem Jahr in der Rinderherde verblieben sind, sowie den Anteil der Neugeborenen, die das Erwachsenenstadium erreichen.
- b) Zurzeit befinden sich 40 Neugeborene, 150 Kälber und 100 Erwachsene in der Herde. (8P)  
Berechnen Sie die Verteilung auf die drei Altersstufen in der Herde für das nächste und das übernächste Jahr. Bestimmen Sie die Verteilung auf die drei Altersstufen für das vergangene Jahr.
- c) Der Züchter sucht eine Strategie, durch Verkauf von Kälbern in die Entwicklung der (12P)  
Herde so einzugreifen, dass eine konstante Verteilung der Tiere in der Rinderherde gewährleistet ist.  
Ermitteln Sie dazu den Anteil der Kälber, die jedes Jahr zusätzlich verkauft werden sollen. Bestimmen Sie eine dazu passende Anfangsverteilung.
- d) Durch eine Krankheit überleben in einem Jahr nur 50% der Neugeborenen. Dadurch (12P)  
verändert sich in diesem Jahr die Übergangsmatrix zu  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.4 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.8 \end{pmatrix}$ .
- Ermitteln Sie, ausgehend von der Anfangsverteilung im Aufgabenteil b), wie viele Tiere nach einem Krankheitsjahr in den verschiedenen Altersstufen gekauft bzw. verkauft werden müssen, damit nach einem Jahr mit normaler Neugeborenenrate der Anfangsbestand wieder erreicht wird.
- e) Berechnen Sie die Matrix  $C = A \cdot B$  und das Produkt von  $C$  mit dem Vektor  $\bar{v}$  der (8P)  
Anfangsverteilung aus Aufgabenteil b). Interpretieren Sie die Komponenten von  $C$  und den Vektor  $C \cdot \bar{v}$  im Sachzusammenhang.