1. **► Wahrscheinlichkeiten bestimmen** (7BE)

Die Kugel rollt mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,6$ nach links und mit $0,4$ nach rechts. Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Felder $F1$ bis $F5$ berechnest du nach der **Pfadregel**.

Die Wahrscheinlichkeit p_1, dass eine Kugel nach $F1$ rollt ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie **einmal rechts rollt**, also genau $p_1 = 0,4$.

Die Wahrscheinlichkeit p_2, dass eine Kugel nach $F2$ rollt ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie einmal links und einmal rechts rollt, also genau $p_2 = 0,6 \cdot 0,4 = 0,24$.

p_3 ergibt sich aus der Wahrscheinlichkeit für zweimal links, einmal rechts, also $p_3 = 0,6^2 \cdot 0,4 = 0,144$

Für p_4 gilt: dreimal links und einmal rechts, d.h. $p_4 = 0,6^3 \cdot 0,4 = 0,0864$.

Für p_5 ergibt sich schließlich viermal links, also $p_5 = 0,6^4 = 0,1296$.

► Erwartungswerte ermitteln

Für jedes Fach $F1$ bis $F5$ ergibt sich eigener Erwartungswert. Dieser wird jeweils berechnet über die Formel $\mu = n \cdot p$, wobei $n = 250$ ist und p die jeweilige Wahrscheinlichkeit p_1 bis p_5:

Nenne die Erwartungswerte μ_1 bis μ_5. Dann gilt:

$\mu_1 = 250 \cdot p_1 = 250 \cdot 0,4 = 100$

$\mu_2 = 250 \cdot p_2 = 250 \cdot 0,24 = 60$

$\mu_3 = 250 \cdot p_3 = 250 \cdot 0,144 = 36$

$\mu_4 = 250 \cdot p_4 = 250 \cdot 0,0864 = 21,6$

$\mu_5 = 250 \cdot p_5 = 250 \cdot 0,1296 = 32,4$

2. **► Bedeutung der Rechnung erläutern** (7BE)

In der Aufgabenstellung ist gegeben, dass ein Spieler gewinnt, wenn die Kugel ins Fach $F1$ rollt. Dies geschieht mit der Wahrscheinlichkeit $p_1 = 0,4$. Also verliert ein Spieler mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - p_1 = 0,6$.

In der Rechnung tauchen genau diese beiden Wahrscheinlichkeiten auf. Insgesamt werden 5 Spiele gemacht. In der Rechnung wird eine Bernoulli-Kette für $n = 5$, $p = 0,6$ und $k = 2$ betrachtet.

Es wird somit die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass der Spieler von 5 Spielen genau 2 verliert.

► Wahrscheinlichkeit berechnen

Sei X die Zufallsvariable, welche die Anzahl der verlorenen Spiele zählt. X ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0,6$. Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 2)$.

Die Wahrscheinlichkeit, die in der Aufgabenstellung berechnet wird und die interpretiert werden sollte, entspricht genau der Wahrscheinlichkeit $P(X = 2)$.

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) && \mid P(X=2) = 0,2304 \\ &= \binom{5}{0} \cdot (0,6)^0 \cdot (0,4)^5 + \binom{5}{1} \cdot (0,6)^1 \cdot (0,4)^4 + 0,2304 \\ &= 0,01024 + 0,0768 + 0,2304 = 0,31744 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $31,744\%$ verliert der Spieler höchstens 2 Spiele.

3. **▶ Bedeutung der Rechnung erläutern** (6BE)

1. Zeile

In der ersten Zeile wird ein **Erwartungswert** μ berechnet für $n = 250$ und $p = 0,4$. Dabei ist n die Anzahl der gespielten Spiele und p die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spiel gewonnen wird. (dass eine Kugel auf $F1$ rollt.)

In 250 Spielen gewinnt der Spieler erwartungsgemäß 100 Mal.

2. Zeile

Hier wird eine **Standardabweichung** σ berechnet. Dabei gilt: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$. Es gilt wieder $n = 250$ und $p = 0,4$, und folglich $(1-p) = 1 - 0,4 = 0,6$. Es ergibt sich der Wert $7,75$.

3. Zeile

Zum Schluss wird ein **Intervall** bzw. eine **Umgebung um den Erwartungswert** berechnet. Es handelt sich hierbei um die 2σ-Umgebung um den Erwartungswert.

▶ Bedeutung der Umgebung erläutern

Die Aussage aus der Formelsammlung besagt: Mit einer Wahrscheinlichkeit von $95,4\%$ weicht die Anzahl der gewonnenen Spiele um höchstens 2σ vom Erwartungswert ab. Dies gilt nur, wenn $\sigma \geq 3$ ist. In unserem Fall ist $\sigma \approx 7,75 > 3$, also gilt: Mit einer Wahrscheinlichkeit von $95,4\%$ liegt die Anzahl der gewonnenen Spiele zwischen 85 und 115.

4. **▶ Zu erwartenden Gewinn berechnen** (10BE)

Der Spielveranstalter erhält pro Spiel einen Einsatz von $0,50\,€$. Bei einem Gewinnt wird dem Spieler $1\,€$ ausgezahlt. Das bedeutet: Gewinnt der Mann, so **verliert der Spielveranstalter** $0,50\,€$. Verliert der Mann, so **gewinnt der Spielveranstalter** $0,50\,€$. Halte dies mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten $0,4$ und $0,6$ in einer Tabelle fest:

Ereignis	Spieler gewinnt	Spieler verliert
Wahrscheinlichkeit	$0,4$	$0,6$
Gewinn für Veranstalter	$-0,50\,€$	$+0,50\,€$

Insgesamt werden 50 Spiele gespielt. Der Spieler wird davon erwartungsgemäß $50 \cdot 0,4 = 20$ gewinnen und $50 \cdot 0,6 = 30$ verlieren.

Für den Gewinn des Veranstalters ergibt sich somit erwartungsgemäß:
$20 \cdot (-0,50)\,€ + 30 \cdot (+0,50)\,€ = +5\,€$

Der Veranstalter kann also einen Gewinn von $5\,€$ erwarten.

▶ Wahrscheinlichkeit für Verlust ermitteln

Der Veranstalter macht Verlust, wenn er mehr Geld ausbezahlen muss als er durch die Einsätze verdient. Da er bei einem gewonnenen Spiel $0,50\,€$ bezahlen muss und bei einem verlorenen Spiel $0,50\,€$ verdient, kommt er **auf Null heraus**, wenn gleich viele Spiele gewonnen und verloren werden. Werden **mehr Spiele gewonnen als verloren**, so macht der Veranstalter Verlust.

Bei 50 Spielen macht er also Verlust, wenn **mehr als** 25 **Spiele** gewonnen werden.

Sei X die Zufallsvariable, welche die gewonnenen Spiele zählt. X ist binomialverteilt mit $n = 50$ und $p = 0,4$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(X > 25)$.

$P(X > 25) = P(X \geq 26) = 1 - P(X \leq 25)$.

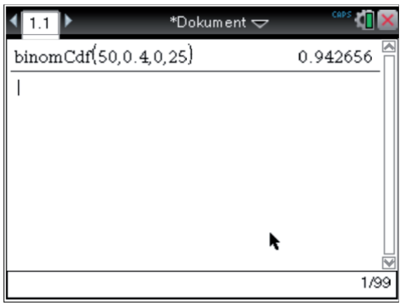
►► Lösungsweg A: Lösung mit der Tabelle

Du benötigst eine Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung für $n = 50$ und $p = 0,4$. Für $k \leq 25$ erhältst du den Wert $P(X \leq 25) = 0,9427$.

Damit ergibt sich: $P(X > 25) = 1 - 0,9427 = 0,0573$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $5,73\%$ gewinnt der Spieler mehr Spiele als er verliert und der Veranstalter macht Verlust.

►► Lösungsweg B: Lösung mit dem CAS

Berechne die benötigte Wahrscheinlichkeit im Calculator - Modus. Benutze den Befehl `binomCdf(..)` um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, achte dabei auf die Reihenfolge: `binomCdf`(n; p; untere Schranke; obere Schranke).
Du erhältst den Wert $P(X \leq 25) = 0,9427$.
Damit ergibt sich: $P(X > 25) = 1 - 0,9427 = 0,0573$.



Mit einer Wahrscheinlichkeit von $5,73\%$ gewinnt der Spieler mehr Spiele als er verliert und der Veranstalter macht Verlust.