a) **Koordinaten der restlichen Punkte bestimmen**

$C\,(0|6|0)$, $E\,(10|0|2)$, $F\,(10|6|2)$, $H\,(0|0|2)$, $J\,(10|4,5|3)$, $L\,(0|1,5|3)$.

Gleichung der Ebene $FGKJ$ bestimmen

Als Stützvektor der Ebene kann z.B. der Ortsvektor $\overrightarrow{OF}$ verwendet werden, als Richtungsvektoren $\overrightarrow{FG}$ und $\overrightarrow{FJ}$.

$$
\begin{aligned}
E: \overrightarrow{x} &= \overrightarrow{OF} + r\cdot\overrightarrow{FG} + s\cdot\overrightarrow{FJ}\\
&= \begin{pmatrix}10\\6\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0 & - & 10\\ 6 & - & 6\\ 2 & - & 2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}10 & - & 10\\ 4,5 & - & 6\\ 3 & - & 2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}10\\6\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\-1,5\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Schnittwinkel der Dachebene mit dem Dachboden bestimmen

Um den Schnittwinkel zweier Ebenen zu bestimmen, betrachtet man deren Normalenvektoren.

Der Dachboden verläuft parallel zur x_1-x_2-Ebene. Der Normalenvektor dieser Ebene lautet also z.B. $\overrightarrow{n}_{EFGH} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Der Normalenvektor der Dachseite $FGKJ$ lässt sich bestimmen mit Hilfe des Kreuzprodukts der Richtungsvektoren:

$$
\begin{array}{rr}
\hline
-10 & 0\\
0 & -1,5\\
0 & 1\\
-10 & 0\\
0 & -1,5\\
0 & 1\\
\hline
\end{array}
= \begin{pmatrix}0\cdot frm[o]—— & - & 0\cdot(-1,5)\\ 0\cdot 0 & - & (-10)\cdot 1\\ -10\cdot(-1,5) & - & 0\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\10\\15\end{pmatrix}
$$

Dieser Vektor lässt sich vereinfachen. Beim Normalenvektor kommt es nur auf die **Richtung** an, in die er zeigt, nicht auf seine **Länge**. Deshalb können wir schreiben:

$$\overrightarrow{n}_{FGKJ} = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Schnittwinkel berechnen

Für den Schnittwinkel α gilt:

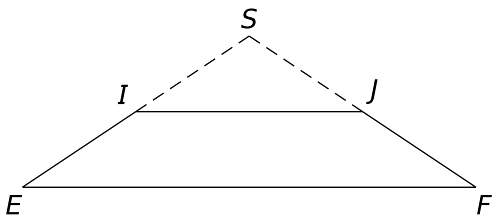
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n}_{FGKJ} \circ \overrightarrow{n}_{EFGH}}{\left|\overrightarrow{n}_{FGKJ}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}_{EFGH}\right|}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{3}{1 \cdot \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\alpha \approx 33,69$$

b) **Ursprüngliche Höhe des Hauses bestimmen**

Die ehemalige Höhe des Hauses lässt sich bestimmen, indem der Schnittpunkt S der Geraden, auf denen die Dachkanten $\overrightarrow{EI}$ und $\overrightarrow{FJ}$ liegen, bestimmt wird.
Nennen wir die Gerade durch die Punkte E und I Gerade g und die durch die Punkte F und J Gerade h.



$$g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OE} + k \cdot \overrightarrow{EI}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 10 & - & 10 \\ 1,5 & - & 0 \\ 3 & - & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OF} + l \cdot \overrightarrow{FJ}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 10 & - & 10 \\ 4,5 & - & 6 \\ 3 & - & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt der Geraden bestimmen

Zur Bestimmung des Schnittpunktes werden die Gleichung der Geraden gleich gesetzt.

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrrcrl}
\text{I} & 10 & & = & 10 & \\
\text{II} & & 1,5k & = & 6-1,5l & \\
\text{III} & 2+ & k & = & 2+\quad l & |-2 \\
\hline
\text{I} & 10 & & = & 10 & \\
\text{II} & & 1,5k & = & 6-1,5l & \\
\text{III} & & k & = & l &
\end{array}$$

Wird $k=l$ eingesetzt in II, ergibt sich.

$$1,5l=6-1,5l \quad \Longleftrightarrow \quad 3l=6 \quad \Longleftrightarrow \quad l=2$$

Zur Bestimmung des Schnittpunktes wird $l=2$ in die Gleichung von h eingesetzt.

$$\overrightarrow{OS}=\begin{pmatrix}10\\6\\2\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}0\\-1,5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\3\\4\end{pmatrix}$$

$S(10|3|4)$

Das Haus war ursprünglich 4 LE hoch.

c) **Volumen des Hauses bestimmen**

Das Haus lässt sich in zwei Körper zerteilen, in einen **Quader** und in ein **Prisma**.

Volumen des Quaders bestimmen

Für das Volumen eines Quaders gilt: $V=a\cdot b\cdot c=\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{BF}$.

$V=6\cdot 10\cdot 2=120$ VE

Volumen des Prismas bestimmen

Für das Volumen gilt: $V=G\cdot h$

Die Grundfläche des Prismas ist ein Trapez. Für den Flächeninhalt des Trapezes gilt $A=\dfrac{a+c}{2}\cdot h=\dfrac{\overline{EF}+\overline{IJ}}{2}\cdot 1=\dfrac{6+3}{2}=4,5$ FE

Somit gilt für das Volumen des Prismas $V=4,5\cdot h=4,5\cdot\overline{FG}=4,5\cdot 10=45$ VE

Für das gesamte Volumen des Hauses gilt somit:
$V_{\text{Haus}}=V_{\text{Quader}}+V_{\text{Prisma}}=45+120=165$ VE

Oberfläche des Hauses bestimmen

Die Oberfläche des Hauses besteht aus sechs verschiedenen Flächenstücken, die zum Teil doppelt vorkommen:

$ABFE=DCGH$, $BCGF=ADHE$, $FGKJ=ILHE$, $EFJI=HGKL$, $IJKL$

ABFE bestimmen

$A_{ABFE}=\overline{AB}\cdot\overline{BF}=6\cdot 2=12$

BCGF bestimmen

$A_{BCGF} = \overline{BC} \cdot \overline{BF} = 10 \cdot 2 = 20$

FGKJ bestimmen

$$\begin{aligned} A_{FGKJ} = & \quad \overline{FG} \cdot \overline{FJ} = 10 \cdot \left|\overrightarrow{FJ}\right| \\ = 10 \cdot & \left|\begin{pmatrix} 10 & - & 10 \\ 4,5 & - & 6 \\ 3 & - & 2 \end{pmatrix}\right| = 10 \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -1,5 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \\ = & \quad 10 \cdot \sqrt{(-1,5)^2 + 1} = 10 \cdot \sqrt{3,25} \end{aligned}$$

EFJI bestimmen

$A_{EFJI} = 4,5$ (s.o.)

IJKL bestimmen

$A_{IJKL} = \overline{IJ} \cdot \overline{KL} = 3 \cdot 10 = 30$

Gesamte Oberfläche bestimmen

Die Gesamtoberfläche setzt sich zusammen wie oben beschrieben, d.h.:

$O_{\text{Haus}} = 2 \cdot 12 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 10\sqrt{3,25} + 2 \cdot 4,5 + 30 \approx 139,056$ FE.

d) Die Antenne verläuft senkrecht zur Dachseite $FGJK$. Somit verläuft sie parallel zum Normalenvektor dieser Seite.
Diesen Normalenvektor haben wir bereits im Aufgabenteil a) bestimmt:

$$\overrightarrow{n}_{FGJK} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Außerdem ist bekannt, dass die Antenne den Dachboden an der Stelle $M(5|4|2)$ durchstößt.

Aus diesen Werten lässt sich eine Geradengleichung zusammensetzen. Hierbei wird der Ortsvektor $\overrightarrow{OM}$ als Stützvektor und der Vektor $\overrightarrow{n}_{FGJK}$ als Richtungsvektor verwendet. Die Gerade wollen wir a nennen.

$$a: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt mit dem Dach bestimmen

Das „Dach“ wird dargestellt durch die Ebene $IJKL$. Diese liegt in der Höhe $x_3 = 3$.

Unser Schnittpunkt hat also die Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Diese Koordinaten setzen wir nun in der Geradengleichung für $\overrightarrow{x}$ ein und bestimmen den Parameter m.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem.

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x_1 & = & 5 \\ \text{II} & x_2 & = & 4 + 2m \\ \text{III} & 3 & = & 2 + 3m \end{array}$$

Aus III folgt: $m = \frac{1}{3}$. Dies eingesetzt in II ergibt:

$$x_2 = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

Daraus folgt der Durchstoßpunkt $D\left(5 \middle| \frac{14}{3} \middle| 3\right)$.