1. 1.1 ▶ **Koordinaten der Eckpunkte bestimmen** (10BE)

Beginne mit den Koordinaten von A. A liegt direkt unterhalb von $E(5 \mid 0 \mid 2)$. A liegt außerdem in einer Ebene mit B. Dadurch kannst du die x- und y-Koordinate direkt übernehmen. Die z-Koordinate nimmt den Wert Null an: $A(5 \mid 0 \mid 0)$.

Nun zu F. Der Wintergarten soll ein **Pultdach** besitzen, d.h. ein Dach, das nach hinten hin ansteigt. Die Vorderkante und Hinterkante des Dachs verlaufen jedoch **parallel** zur Grundfläche. Damit liegen die Punkte E und F auf einer Höhe. Weiterhin liegt F direkt oberhalb von B. Dies führt zu den Koordinaten $F(5 \mid 3{,}5 \mid 2)$.

Betrachten wir jetzt den Punkt C. In der Aufgabenstellung wird angegeben, dass die Terrasse die Form eines **Rechtecks** besitzt. Damit verläuft die Strecke $\overline{BC}$ parallel zur x-Achse. Der Punkt C unterscheidet sich als lediglich in der x-Koordinate von B: $C(0 \mid 3{,}5 \mid 0)$.

Der Punkt G schließlich liegt direkt oberhalb von C und auf der gleichen Höhe wie H und somit ergibt sich $G(0 \mid 3{,}5 \mid 3)$.

1.2 ▶ **Inhalt der zu verglasenden Fläche berechnen**

Diese Fläche setzt sich aus **vier** Teilflächen zusammen: $ABFE$, $BCGF$ und der Deckfläche $EFGH$. Die übrigen befinden sich entweder auf dem Boden oder an der Hauswand.

1. Schritt: Inhalt von $ABFE$ berechnen

Bei der Fläche $ABFE$ handelt es sich um ein **Rechteck**. Den Flächeninhalt eines Rechtecks berechnest du über die Formel $A_{\text{Rechteck}} = a \cdot b$, wobei a die Länge und b die Breite des Rechtecks sind. In unserem Fall bietet es sich an, $a = \overline{AB}$ und $b = \overline{BF}$ zu setzen:

$$\begin{aligned}
A_{ABFE} &= \overline{AB} \cdot \overline{BF} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BF}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 5 & - & 5 \\ 3{,}5 & - & 0 \\ 0 & - & 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 5 & - & 5 \\ 3{,}5 & - & 3{,}5 \\ 2 & - & 0 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 3{,}5 \cdot 2 = 7
\end{aligned}$$

2. Schritt: Inhalt von $BCGF$ berechnen

Bei $BCGF$ handelt es sich um ein **Trapez**, wobei die Seiten $\overline{BF}$ und $\overline{CG}$ parallel verlaufen. Den Inhalt eines Trapezes berechnest du über die Formel $A_{\text{Trapez}} = \frac{a+c}{2} \cdot h$, wobei a und c die parallel verlaufenden Seiten sind, und h die Höhe des Trapezes.
In unserem Fall bietet es sich an, $a = \overline{BF}$, $b = \overline{CG}$ und $h = \overline{BC}$ zu wählen.

$$A_{BCGF} = \frac{\overline{BF}+\overline{CG}}{2}\cdot\overline{BC} = \frac{\left|\overrightarrow{BF}\right|+\left|\overrightarrow{CG}\right|}{2}\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|$$

$$= \frac{\left|\begin{pmatrix} 5 & - & 5 \\ 3,5 & - & 3,5 \\ 2 & - & 0 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 0 & - & 0 \\ 3,5 & - & 3,5 \\ 3 & - & 0 \end{pmatrix}\right|}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix} 0 & - & 5 \\ 3,5 & - & 3,5 \\ 0 & - & 0 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{2+3}{2}\cdot 5 = \frac{5}{2}\cdot 5 = 12,5$$

3. Schritt: Inhalt von $EFGH$ berechnen

Bei $EFGH$ handelt es sich wieder um ein Rechteck. Wähle dieses Mal $a = \overline{EF} = \overline{AB} = 3,5$ und $b = \overline{FG}$:

$$A_{EFGH} = \overline{EF}\cdot\overline{FG} = \left|\overrightarrow{EF}\right|\cdot\left|\overrightarrow{FG}\right|$$

$$= 3,5\cdot\left|\begin{pmatrix} 0 & - & 5 \\ 3,5 & - & 3,5 \\ 3 & - & 2 \end{pmatrix}\right|$$

$$= 3,5\cdot\left|\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = 3,5\cdot\sqrt{(-5)^2+1} = 3,5\cdot\sqrt{26} \approx 17,85$$

4. Schritt: Inhalt der Gesamtfläche ermitteln

Addiere die Inhalte dieser drei Teilflächen und erhalte:
$A_{\text{gesamt}} = 7 + 12,5 + 17,85 = 37,35.$

Der Flächeninhalt der zu verglasenden Außenfläche beträgt $37,35\,\text{m}^2$.

1.3 ▶ **Rauminhalt des Wintergartens ermitteln**

Wie in der Aufgabenstellung bereits gesagt, handelt es sich beim Wintergarten um ein **Prisma**. Dies ist ein Körper, dessen Grund- und Deckfläche in Form und Größe identisch sind und parallel übereinander liegen. Das Volumen eines Prismas ermittelst du über die Formel $V_{\text{Prisma}} = G\cdot h$, wobei G für den Inhalt der Grundfläche und h für die Höhe des Prismas steht.
In unserem Fall wird die Grundfläche gebildet durch die Fläche $BCGF$ und die Höhe durch die Strecke $\overline{EF}$:

$$V_{\text{Prisma}} = 12,5\cdot 3,5 = 43,75$$

Der Rauminhalt des Wintergartens beläuft sich auf $43,75\,\text{m}^3$.

2. 2.1 ▶ **Ebenengleichung der Dachfläche $EFGH$ ermitteln** (8BE)

1. Schritt: Ebenengleichung in Parameterform bestimmen

Benutze als **Stützvektor** z.B. den Ortsvektor $\overline{OE}$ zum Punkt E und als **Richtungsvektoren** die Vektoren $\overline{EF}$ und $\overline{EH}$.

$$E_1: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OE} + r \cdot \overrightarrow{EF} + s \cdot \overrightarrow{EH}$$
$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3,5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Ebenengleichung in Koordinatenform bestimmen

Die Ebenengleichung in Koordinatenform hat die Form $E_1: ax + by + cz = d$ Forme die Gleichung in Parameterform über ein **lineares Gleichungssystem** so um, dass sie am Ende diese Form hat:

$$\begin{array}{lllll} \text{I} & x = 5 + & 0r & - 5s \\ \text{II} & y = 0 + & 3,5r & + 0s \\ \text{III} & z = 2 + & 0r & + 1s \end{array}$$

Aus II folgt: $y = 3,5r$, also $r = \frac{1}{3,5}y = \frac{2}{7}y$

Aus III folgt: $z = 2 + s$, also $s = z - 2$.

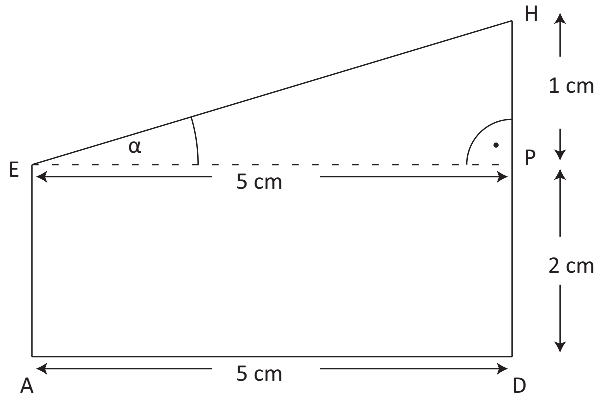
Setze diese beiden Ergebnisse ein in I:

$$x = 5 - 5 \cdot (z - 2)$$
$$x = 5 - 5z + 10 = 15 - 5z \quad | +5z$$
$$x + 5z = 15$$

Die Ebenengleichung von E_1 in Koordinatenform lautet $E_1: x + 5z = 15$.

2.2 ▶ **Neigungswinkel untersuchen**

Betrachte die Ebene $ADHE$ des Wintergartens: Ziehe eine Parallele zur x-Achse durch Punkt E und erhalte einen Schnittpunkt P mit der z-Achse. E, P und H bilden ein **rechtwinkliges Dreieck**. Der **Neigungswinkel** der Dachfläche entspricht dem Winkel α:



$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{1}{5} \qquad | \tan^{-1}()$$
$$\alpha = \sin^{-1}(\tfrac{1}{5}) \approx 11,31° > 10°$$

Mit einem Neigungswinkel von $11,31°$ wird die Empfehlung eingehalten.

3. 3.1 ▶ **Position des Sandkastens betrachten** (12BE)

1. Schritt: Sandkasten zeichnen

Zeichne zunächst den Sandkasten in ein Koordinatensystem ein, um seine Position richtig einschätzen zu können.

2. Schritt: „Schattenpunkte" von E und F ermitteln

Der Strahler, der im Punkt $L(0 \mid 0 \mid 6)$ angebracht ist, erzeugt einen Schatten des Wintergartens. In der Skizze (s.u.) erkennst du, dass nur die Schattenpunkte E' und F' von E und F einen Schatten auf den Sandkasten werfen können. Ermittle also deren Koordinaten.

Gehe hierzu folgendermaßen vor.

1. Bestimme die Gleichung einer Geraden g_{LE} bzw. g_{LF}, welche durch die Punkte L und E bzw. L und F geht.
2. Ermittle die Koordinaten des Punktes E' bzw. F', in dem die Geraden die x-y-Ebene durchstoßen. Dies sind die Schattenpunkte von E und F.

Es ergeben sich zunächst die Geradengleichungen:

$$g_{LE}: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OL} + k \cdot \overrightarrow{LE}$$

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 5 & - & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 2 & - & 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$g_{LF}: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OL} + l \cdot \overrightarrow{LF}$$

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 5 & - & 0 \\ 3,5 & - & 0 \\ 2 & - & 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3,5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Nun zu den Durchstoßpunkten. Sie werden auch **Spurpunkte** genannt. Da sowohl E' als auch F' in der x-y-Ebene liegen sollen, gilt, dass die z-Koordinate beider Punkte $z = 0$ sein muss. Allgemein können wir also zunächst annehmen: $E'(x_{E'} \mid y_{E'} \mid 0)$ und $F'(x_{F'} \mid y_{F'} \mid 0)$.

Setze die Koordinaten dieser Punkte nun in die Geradengleichungen für $\overrightarrow{x}$ ein und löse nach k bzw. nach l auf. Damit erhältst du die vollständigen Koordinaten der Punkte.

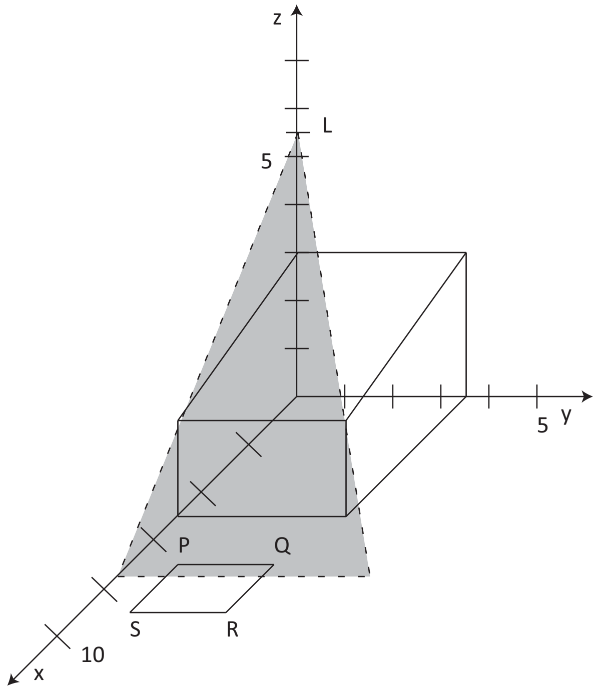
$$\begin{pmatrix} x_{E'} \\ y_{E'} 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_{F'} \\ y_{F'} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3,5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Betrachte jeweils die **letzte** Zeile der Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= 6 - 4k && \mid +4k \\ 4k &= 6 && \mid :4 \\ k &= \tfrac{3}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 0 &= 6 - 4l && \mid +4l \\ 4l &= 6 && \mid :4 \\ l &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Setze k und l in die Gleichungen der beiden Geraden ein und erhalte die beiden Punkte $E'(7,5 \mid 0 \mid 0)$ und $F'(7,5 \mid 5,25 \mid 0)$.

Zeichne diese Punkte mit in die Skizze ein:



3. Schritt: Lage der Punkte interpretieren

Der Sandkasten besitzt eine obere Kante auf der Höhe $x = 7$. Der Schatten des Wintergartens jedoch reicht bis zur Höhe $x = 7{,}5$. Damit liegt der Sandkasten **nicht** vollständig im Licht des Strahlers, sondern er wird teilweise vom Schatten des Wintergartens bedeckt.

3.2 ► **Berechnung des Flächeninhalts ausführlich erklären**

Der Lichtstrahl geht vom Punkt L aus und erzeugt einen Schatten des Wintergartens. Einen Teil des Schattens hast du eben betrachtet: er wurde von den Punkten E' und F' begrenzt. Ein weiterer Teil des Schattens wird durch die Schattenpunkte F' und G' begrenzt.

Der Schatten schließt dabei jeweils direkt an die Kanten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{BC}$ an. Die Begrenzung $\overline{E'F'}$ verläuft dabei **parallel** zu der Seite $\overline{AB}$ und somit auch zur Strecke $\overline{CD}$.

Gemeinsam mit dem Wintergarten bildet der Schatten also ein **Trapez**, wobei die Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{E'F'}$ parallel zueinander verlaufen. Berechne den Flächeninhalt dieses Trapezes und ziehe den Inhalt der Grundfläche des Wintergartens $ABCD$ ab.