1.1 ► Koordinaten von T, U, X und F

Um die Koordinaten der einzelnen Punkte zu bestimmen, bedienst du dich der gegebenen Seitenlängen und der vorhanden Symmetrie des Pavillons. Die Symmetrie bedingt, dass sich der Mittelpunkt der Grundfläche im Ursprung, also im Punkt $O(0|0|0)$ befindet. Außerdem werden die Seiten der Grundfläche und des Quadrats $F_1F_2F_3F_4$ durch die Ebenen, die die Koordinatenachsen aufspannen, halbiert.

Außerdem ist die Grundfläche der Pyramide, die das Dach darstellt, parallel zur Grundfläche des Pavillons, sodass die Eckpunktpaare dieselbe x_1- und x_2-Koordinate haben.

- Symmetrie bedingt Mittelpunkt der Grundfläche im Ursprung
- Symmetrie bedingt Halbierung der Seiten
- Eckpunktpaare haben selbe x_1- und x_2-Koordinate

Über den Punkt X wird ausgesagt, dass er sich 2,5 m oberhalb des Mittelpunkts also $O(0|0|0)$, der demnach die senkrechte Projektion von X auf die x_1x_2-Ebene ist, befindet.

Da 1 LE$\widehat{=}$1 m, kannst du daher auf den Punkt $X(0|0|2,5)$ schließen, da oberhalb immer eine Erhöhung der x_3-Koordinate bedeutet.

Die Punkte T und U bilden je ein Eckpunktpaar mit den Punkten P und Q. Außerdem haben P und Q dieselbe x_1-Koordinate und liegen in der x_1x_2-Ebene.

Aus der gegebenen Bedingung folgt also $x_1T = x_1P = x_1U = x_1Q$, $x_2T = x2P$ und $x_2U = x_2Q$. Außerdem gilt $x_3Q = x_3P = 0$. Aus der Halbierung der Seiten $\overline{PQ}$ mit einer Länge von $\overline{PQ} = 3$ resultiert $P(1,5|-1,5|0)$ und $Q(1,5|1,5|0)$.

Da die Aufgabe vorgibt, dass die Ebene $UVWT$ 2 m oberhalb der x_1x_2-Ebene liegen soll, haben somit die Punkte U und T die Koordinaten $U(1,5|1,5|2)$ und $T(1,5|-1,5|2)$.

Der Punkt F_1 liegt auch in der x_1x_2-Ebene und hat folglich die Koordinate $x_3 = 0$. Da außerdem das Quadrat $F_1F_2F_3F_4$ symmetrisch zum Ursprung ist, werden auch hier die Seitenlängen halbiert. Daher entsprechen die x_1- und die x_2-Koordinate $\frac{1}{2} \cdot \overline{F_1F_2}$. Mit der Seitenlänge von 7 m folgen daraus die Koordinaten von F_1 mit $F_1(3,5|-3,5|0)$.

Zusammengefasst haben die Punkt T, X, U und F_1 folgende Koordinaten:

$$T(1,5|-1,5|2) \quad U(1,5|1,5|2) \quad X(0|0|2,5) \quad F_1(3,5|-3,5|0)$$

1.2 ► Materialbedarf bestimmen

Die Längen der Spannschnüre werden, da sie alle gleich lang sind, durch die Länge des Vektors $\overrightarrow{TF_1}$ beschrieben. Die Länge eines Vektors bestimmst du über die Formel $\sqrt{(f_1-t_1)^2+(f_2-t_2)^2+(f_3-t_3)^2}$. Da 4 Schnüre vorhanden sind, musst du das Ergebnis noch vervierfachen.

Die gesuchte Fläche ist die Mantelfläche der Pyramide. Diese kannst du über

$$4 \cdot \frac{1}{2}|\overrightarrow{XU} \times \overrightarrow{XT}|$$

bestimmen, da $|\overrightarrow{XU} \times \overrightarrow{XT}|$ den Flächeninhalt des Parallelograms beschreibt, das parallele Seiten der Länge $|\overrightarrow{XU}|$ und $|\overrightarrow{XT}|$ besitzt. Die Hälfte davon ist folglich der Flächeninhalt eines Dreiecks. Von diesen benötigst du 4 um die Schutzhülle zu beschreiben.

- Länge der Schnüre über $\sqrt{(f_1 - t_1)^2 + (f_2 - t_2)^2 + (f_3 - t_3)^2}$ bestimmen
- Schutzhülle über $4 \cdot \frac{1}{2}|\overrightarrow{XU} \times \overrightarrow{XT}|$ berechnen

Bestimme zunächst die Länge der Schnüre über $\sqrt{(f_1 - t_1)^2 + (f_2 - t_2)^2 + (f_3 - t_3)^2}$. Eingesetzt ergibt sich die Form

$l = \sqrt{(3,5 - 1,5)^2 + (-3,5 + 1,5)^2 + (0 - 2)^2}$

$l = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (0 - 2)^2}$

$l = \sqrt{4 + 4 + 4}$

$l = \sqrt{12}$ teilweise Wurzel ziehen

$l = 2 \cdot \sqrt{3}$

Folglich besitzt eine Schnur die Länge $l = 2 \cdot \sqrt{3}$ und alle 4 Schnüre folglich $4 \cdot l = 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}$. Damit werden $8 \cdot \sqrt{3}\,\text{m}$ Schnüre benötigt.

Berechne nun das Kreuzprodukt von $\overrightarrow{XU}$ und $\overrightarrow{XT}$, um dann die Fläche der Schutzhülle zu berechnen. Bestimme dazu zunächst die Vektoren $\overrightarrow{XU}$ und $\overrightarrow{XT}$.

$$\overrightarrow{XU} = \overrightarrow{OU} - \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{XT} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -1,5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -1,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

Daraus resultiert folgendes Kreuzprodukt

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -0,75 - 0,75 \\ -0,75 + 0,75 \\ -2,25 - 2,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0 \\ -4,5 \end{pmatrix}$$

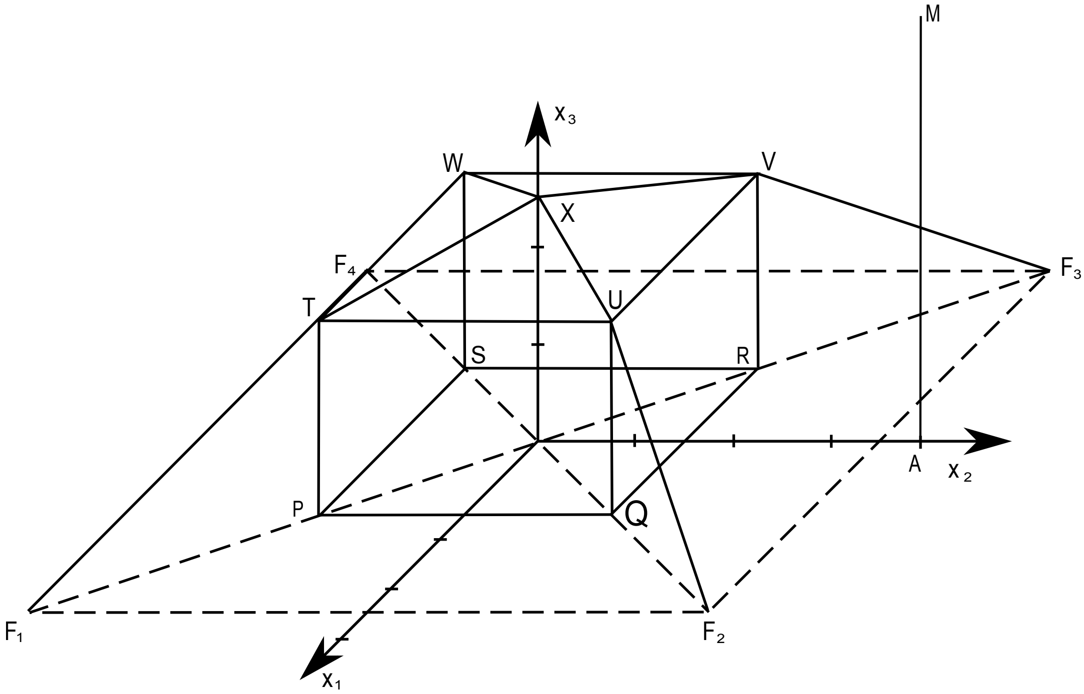
Somit resultiert daraus die Formel zur Berechnung der Schutzhülle mit $4 \cdot \frac{1}{2}|\overrightarrow{a}|$ und somit $2 \cdot \sqrt{(-1,5)^2 + 0^2 + (-4,5)^2}$. Vereinfacht erhältst du also $2 \cdot \sqrt{2,25 + 20,25} = 2 \cdot \sqrt{22,5} \approx 9,49$. Somit werden ca. $9{,}49\,\text{m}^2$ für die Schutzhülle benötigt.

Gesamt benötigt man also für die Reparatur des Pavillons $8 \cdot \sqrt{3}\,\text{m}$ Schnur und ca. $9,49\,\text{m}^2$ Material für die Schutzhülle.

2.1 ▶ **Fahnenmast einzeichnen**

Um den Fahnenmast einzuzeichnen, musst du vom Punkt A als Basis ausgehen. Er ist der unterste Punkt des Mastes. Da ein Fahnenmast in der Regel senkrecht steht, kannst du dann einfach die gegebene Höhe von A ausgehend in x_3-Richtung abtragen, sodass du den höchsten Punkt erhältst.

Verbinde die beiden Punkte. Zeichne nicht über sie hinaus, da der Fahnenmast ein Objekt mit einer fest definierten Länge von $4,5$ m ist und somit eine Verlängerung in positiver x_3-Richtung im Kontext der Aufgabe falsch wäre. Eine Verlängerung in negativer x_3-Richtung hingegen wäre unrealistisch, da man den Fahnenmast sonst durch den Boden sehen könnte, sodass auch dies im Kontext der Aufgabe falsch wäre.



2.2 ▶ **Schattenpunkt und X fallen zusammen**

Um nachzuweisen, dass der Schattenpunkt der Mastspitze M und der Punkt S zusammenfallen, musst du zunächst den Schatten von M konstruieren, indem du aus dem Punkt M, der sich 4,5 m über A befindet, und dem Richtungsvektor der Sonnenstrahlen eine Gerade bildest. Auf dieser muss der Punkt X liegen, damit der Schattenpunkt von M und der Punkt X zusammenfallen.

- Punkt M definieren
- Gerade i durch M mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$
- prüfen ob $X \in i$

Der Punkt M befindet sich 4,5 m oberhalb des Punktes A, da M die höchste Spitze des Mastes ist. Folglich hat M die Koordinaten $M(0|4|4,5)$. Aus M und $\overrightarrow{v}$ kannst du jetzt die Gerade i bilden.

$$i:\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}0\\4\\4,5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

Setze nun den Punkt X ein und prüfe ob er auf i liegt. Es gilt $X\in i$, wenn $t_1=t_2=t_3$.

$$\begin{array}{llrcrl}
\text{I} & 0 & = & 0 & + & 0t_1 \\
\text{II} & 0 & = & 4 & - & 2t_2 \quad |\ -4 \\
\text{III} & 2,5 & = & 4,5 & - & t_3 \quad |\ -4,5
\end{array}$$

$$\begin{array}{llrl}
\text{I} & 0 & = & 0t_1 \\
\text{II} & -4 & = & -2t_2 \ |:(-2) \\
\text{III} & -2 & = & -t_3 \ |:(-1)
\end{array}$$

$$\begin{array}{llrl}
\text{I} & 0 & = & 0t_1 \\
\text{II} & 2 & = & t_2 \\
\text{III} & 2 & = & t_3
\end{array}$$

Da der Faktor 0 vor dem Parameter t_1 steht, kannst du für diesen alle Zahlen einsetzen. Somit gilt $T_1=t_2=t_3$. Damit ist bewiesen, dass der Punkt X mit dem Schattenpunkt von M zusammenfällt.

3.1 ▶ **Ebene E aufstellen**

Die Ebene E in Parametergleichung stellst du auf, indem du einen Stützvektor $\overrightarrow{OT}$ und 2 Richtungsvektoren $\overrightarrow{TU}$ und $\overrightarrow{TX}$ aufstellst, die nach der Formel

$$E:\overrightarrow{x}=\overrightarrow{OT}+s\cdot\overrightarrow{TU}+t\cdot\overrightarrow{TX}$$

dann eine Ebene in Parametergleichung aufspannen.

Über das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren nach $\overrightarrow{TU}\times\overrightarrow{TX}$ erhältst du den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der Ebene E, mit dessen Hilfe du die Normalenform der Ebene bestimmen kannst. Diese wird durch die Form

$$E:\left(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{OT}\right)\cdot\overrightarrow{n}=0$$

beschrieben. Durch Ausmultiplizieren erhältst du die Form

$$E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = n_1 \cdot t_1 + n_2 \cdot t_2 + n_3 \cdot t_3.$$

- Parameterform mit Hilfe zweier Richtungsvektoren aufstellen
- Normalenvektor mittels Kreuzprodukt bestimmen
- Normalenform aufstellen
- Normalenform ausmultiplizieren

Die Richtungsvektoren der Ebene bestimmst du über $\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{OU} - \overrightarrow{OT}$ und $\overrightarrow{TX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OT}$. Daraus resultieren folgende Vektoren:

$$\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{OU} - \overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,5 \\ -1,5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{TX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,5 \\ -1,5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

Und somit bildet sich die Ebene E in Parameterform mit

$$E: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -1,5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1,5 \\ 1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

Bilde nun das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren, um den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ zu bestimmen.

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1,5 - 0 \\ (0) - 0 \\ 0 - (-4,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 4,5 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich dann die Normalform der Ebene E mit

$$E: \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,5 \\ -1,5 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Multipliziere diese Form aus, sodass du die folgende Ebenengleichung erhältst.

$$E: x_1 + 3 \cdot x_3 = 1,5 + 6 = 7,5$$

3.2 ▶ Bedeutungen der Gleichungen erklären

Die Aufgabe handelt von einem Vordach für den Pavillon, der mittels zweier Stützstangen gesichert werden soll. Anhand dieses Bezugs können wir die Gleichungen unter gewissen Aspekten betrachten.

Auch die im Teil 3.1 aufgestellte Ebenengleichung kommt mir Sicherheit zum Tragen.

Außerdem wird ein Punkt U' aufgeführt, dessen Bezeichnung auf eine Verbindung mit dem Punkt U hinweist.

Erkläre folglich die Gleichungen immer im Bezug auf den Gesamtkontext der Aufgabe, sowie auf im vorherigen Abschnitt errechnete Gegebenheiten. Ziehe auch Umformungen von anderen Gleichungen innerhalb des Kastens in Betracht.

- Gesamtkontext beachten
- Stangen werden durch Geraden dargestellt
- x_3-Koordinate der Schnittpunkte der Stütze und der Ebene E geben Länge der Stütze an

Aus diesen Vorgaben ist die Gleichung (A) somit die Gerade, die einer der Stützstangen entspricht. Dies ist auch damit zu begründen, dass die Gerade g einen Richtungsvektor besitzt, der nur über eine x_3-Koordinate verfügt. Somit steht die Gerade senkrecht zur x_1x_2-Ebene und kann somit als eine der vertikalen Stützstangen beschrieben werden, da vertikal senkrecht zum Boden bedeutet.

Betrachten wir nun die Gleichung (B), so müssen wir zum einen die Gerade g sowie die Ebene E miteinbeziehen, um ihre Bedeutung zu erklären. Diese Gleichung entsteht dadurch, dass die Gerade in die Koordinatengleichung von E eingesetzt wird, um den Schnittpunkt zu bestimmen.

Der gesamte Vorgang des Einsetzens sieht wie folgt aus.

$$E: 2 + 0 \cdot r + 0 + 3 \cdot r - 7{,}5 = 2 + 3 \cdot r - 7{,}5 = 0,$$

wobei $2 + \cdot r$ der x_1-Koordinaten und $3 \cdot r$ der x_3-Koordinaten der Geraden entspricht.

Somit beschreibt Gleichung B die Suche nach dem Schnittpunkt von g und E.

Die Gleichung (C) zeigt das Ergebnis für den Parameter r, der eingesetzt in die Geradengleichung von g den Schnittpunkt der Ebene E und der Geraden g beschreibt, also den höchsten Punkt einer der vertikalen Stützstangen. Dieses Ergebnis erhält man durch durch folgende Umformungen aus der Gleichung (B).

$$\begin{aligned} 2 + 3 \cdot r - 7{,}5 &= 0 && \mid +7{,}5 \\ 2 + 3 \cdot r &= 7{,}5 && \mid -2 \\ 3 \cdot r &= 5{,}5 && \mid :3 \\ r &= \frac{5{,}5}{3} \mathrel{\widehat{=}} \frac{11}{6} \end{aligned}$$

Der Punkt U' beschreibt abschließend diesen Schnittpunkt von g und E und somit den höchsten Punkt der vertikalen Stützstange.

Du erhältst den Punkt U', indem du r, das in (C) berechnet wurde, in die Geradengleichung einsetzt.

$$\overrightarrow{u'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{11}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \\ 1,83 \end{pmatrix}$$

► Länge der Stützstange angeben

Die Länge einer vertikalen Stützstange entspricht immer der x_3-Koordinate ihres höchsten Punktes. Da wir U' bereits als den höchsten Punkt einer der Stützstangen definiert haben, gilt somit $l(Stange) = x_3(U')$.

Somit ergibt sich für die Stützstange eine Länge von $1,83\,\text{m}$.