a) **▶ Bestimmung von Mittelpunkt und Radius der beiden Kreise** (7BE)

Um den Mittelpunkt und Radius von k_1 zu bestimmen, wird seine Kreisgleichung durch **quadratische Ergänzung** auf die Form

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$

gebracht, woraus sofort der Mittelpunkt $M_1(x_M \,|\, y_M)$ und der Radius r abgelesen werden können.

$$\begin{aligned}
k_1\colon \quad x^2 + y^2 + 4y &= 0 && |\text{ quad. Ergänzung: } +4 \text{ und } -4 \\
x^2 + y^2 + 4y + 4 - 4 &= 0 && |\text{ 1. bin. Formel rückwärts anwenden} \\
x^2 + (y+2)^2 - 4 &= 0 && |\ +4 \\
x^2 + (y+2)^2 &= 4
\end{aligned}$$

Nach der allgemeinen Kreisgleichung hat k_1 damit den Mittelpunkt $M_1(0 \,|\, -2)$ und den Radius $r = \sqrt{4} = 2$.

Die x-Koordinate des Kreises k_2 ist mit $x_M = 2$ gegeben. Da der Mittelpunkt M_2 auf der Geraden $g\colon y = \frac{1}{2}x - 2$ liegt, gilt für seine y-Koordinate:

$$y_M = \frac{1}{2}x_M - 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 - 2 = -1$$

Der Mittelpunkt M_2 hat damit die Koordinaten $M_2(2 \,|\, -1)$. Da der Kreis die x-Achse berührt, entspricht sein Radius dem Abstand seines Mittelpunkts von der x-Achse, es ist also $r = 1$. Der Kreis hat nach der allgemeinen Kreisgleichung damit die Gleichung

$$k_2\colon (x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$$

▶ Untersuchung der Lage der beiden Kreise

Um zu überprüfen, ob sich die beiden Kreise evtl. schneiden, muss versucht werden, Schnittpunkt der beiden Kreise zu berechnen. Löse dazu eine der beiden Kreisgleichungen nach y auf und setze sie in die andere Gleichung ein:

$$\begin{array}{lrl}
k_1\colon & x^2 + y^2 + 4y = 0 & |\ \cdot(-1) \\
k_2\colon & (x-2)^2 + (y+1)^2 = 1 & |\text{ ausmultiplizieren} \\
\hline
k_1\colon & -x^2 - y^2 - 4y = 0 & |\text{ zu } k_2 \text{ addieren} \\
k_2\colon & x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 1 & \\
\hline
k_2\colon & -4x + 4 - 2y + 1 = 1 & \\
 & y = -2x + 2 &
\end{array}$$

Damit ist die zweite Kreisgleichung nach y aufgelöst. Einsetzen in die Kreisgleichung von k_1 ergibt:

$$\begin{aligned}
x^2 + (-2x+2)^2 + 4(-2x+2) &= 0 \\
x^2 - 4x^2 - 8x + 4 - 8x + 8 &= 0 \\
5x^2 - 16x + 12 &= 0 \\
x^2 - \frac{16}{5}x + \frac{12}{5} &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{8}{5} \pm \sqrt{\frac{64}{25} - \frac{12}{5}} \\
x_{1/2} &= \frac{8}{5} \pm \frac{2}{5} \\
x_1 &= 2 \\
x_2 &= \frac{6}{5}
\end{aligned}$$

Die Gleichung hat zwei Lösungen, daher schneiden sich die Kreise **in zwei Punkten**.

► Angabe der zugehörigen Kreise und Begründung

Der Kreis k_1 hat den Mittelpunkt $M_1(0\,|\,-2)$. Sein Mittelpunkt liegt also auf der x-Achse, der Kreis k_1 wird daher durch den Kreis b veranschaulicht.

Der Kreis k_2 schneidet den Kreis k_1 in zwei Punkten und liegt wegen $M_2(2\,|\,-1)$ rechts von ihm. Der Kreis k_2 wird daher durch den Kreis c veranschaulicht.

b) **► Berechnung des Steigungswinkels der Tangente** (3BE)

Für den Steigungswinkel α einer Geraden g mit der Steigung m gilt allgemein

$\tan\alpha = m$

Die Steigung der Tangenten ist zwar nicht gegeben $-$ jedoch die Steigung der Geraden g, die die **Winkelhalbierende** zwischen der Tangenten und der x-Achse darstellt. Deshalb entspricht der Steigungswinkel von g genau dem halben Steigungswinkel von der Tangenten. Es ist also

$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} \approx 26,56\,^\circ$

$\Rightarrow \quad \alpha \approx 53,13\,^\circ$

Die Tangente besitzt einen Steigungswinkel von etwa 53,13 °.