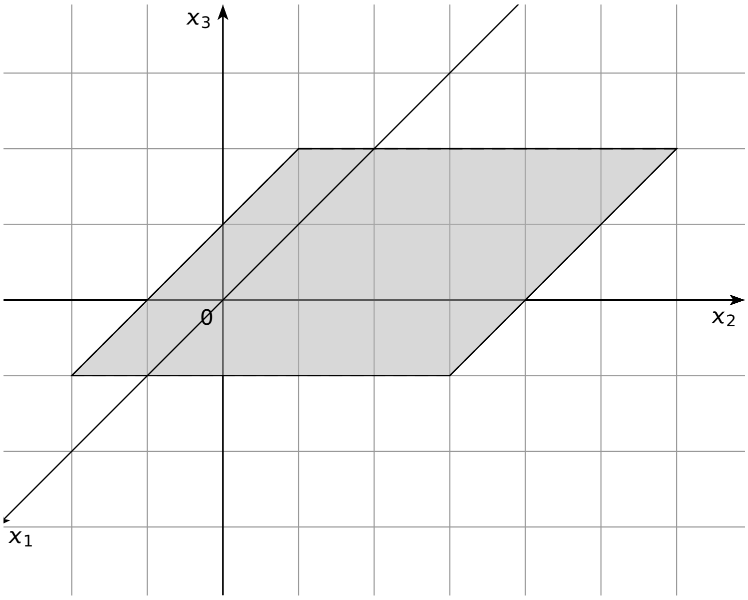
2.1 ► Begründung, dass die Platte parallel zur x_1x_2-Ebene liegt (3P)

Die Tischtennisplatte liegt in einer Ebene, die durch die Punkte A, B und D eindeutig definiert ist.

Diese Ebene soll nun parallel zur x_1x_2-Ebene sein. Eine mögliche Ebene ist im Schaubild unten abgebildet:



Alle Punkte einer solchen Ebene besitzen die gleiche x_3-Koordinate. Wenn dies auch für die drei Eckpunkte der Tischtennisplatte gilt, so sind ist die Ebene parallel zur x_1x_2-Ebene.

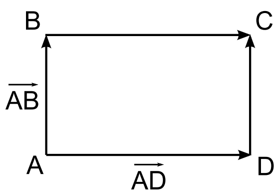
Tatsächlich sind die x_3-Koordinaten von A, B und D gleich, sie lautet

$x_3 = 76.$

Damit ist gezeigt, dass die Tischtennisplatte parallel zur x_1x_2-Ebene liegt.

► Koordinaten von C

Die Tischtennisplatte stellt ein Rechteck mit der Breite AB und der Länge AD dar. Von oben betrachtet sieht die Platte dann wie folgt aus:



Man kommt also vom Ursprung zum Punkt C durch Ansetzen der folgenden Vektorenkette:

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OC}.$

Bestimme die nun die Vektoren $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{AD}$ und berechne den Ortsvektor und damit die Koordinaten von C.

$\overrightarrow{OB}$ ist der Ortsvektor von A und lautet damit:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 122 \\ 0 \\ 76 \end{pmatrix}.$$

$\overrightarrow{AB}$ ist der Verbindungsvektor von A nach D und wird durch die Differenz der Koordinaten der Endpunkte bestimmt:

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 164,4-0 \\ 310,7-91,5 \\ 76-76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 164,4 \\ 219,2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Setze die Vektoren nun in die Gleichung ein und bestimme $\overrightarrow{OC}$:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 122 \\ 0 \\ 76 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 164,4 \\ 219,2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 286,4 \\ 219,2 \\ 76 \end{pmatrix}.$$

Die Koordinaten von C lauten damit:

$C(286,4\,|\,219,2\,|\,76)$.

2.2 ▸ **Gleichung der Ebene, in der das Netz verläuft** (4P)

In der Abbildung der Aufgabenstellung kannst du das Netz erkennen. Um eine Gleichung einer Ebene H, in der dieses verläuft, aufzustellen, werden drei Punkte der Ebene benötigt, die gemeinsam ein Dreieck bilden, also nicht in einem Punkt oder auf einer Geraden liegen.

Wir wissen, dass das Netz in der Mitte der Platte platziert ist, das heißt, dass zwei Punkte M und N der Ebene sich jeweils auf dem Mittelpunkt von AD und BC befinden, sie haben allgemein die Koordinaten:

$M(m_1\,|\,m_2\,|\,m_3)$ und $N(n_1\,|\,n_2\,|\,n_3)$.

Zudem ist die Höhe des Netzes H zu $h = 15,25\,\text{cm}$ gegeben, ein dritter geeigneter Punkt P liegt daher direkt über M. Da die Platte parallel zur x_1x_2-Ebene steht, unterscheidet sich P von M nur bezüglich der x_3-Koordinate. Bei P ist sie um h größer. Daraus folgt für die Koordinaten von P:

$P(m_1\,|\,m_2\,|\,m_3+h)$.

Sind die Punkte gefunden, kannst die Parametergleichung von H aufstellen.
Eine Parametergleichung hat allgemein die Form:

$$H:\quad \overrightarrow{x} = \overrightarrow{\text{Stützvektor}} + r\cdot\overrightarrow{\text{Spannvektor}_1} + t\cdot\overrightarrow{\text{Spannvektor}_2}.$$

Ein Stützvektor ist dabei der Ortsvektor eines Punktes der Ebene und die Spannvektoren sind Verbindungsvektoren von jeweils zwei Punkten, die in der Ebene liegen. Die Spannvektoren dürfen dabei keine Vielfache voneinander darstellen.

Ein geeigneter Stützvektor wäre $\overrightarrow{OM}$, geeignete Spannvektoren $\overrightarrow{MN}$ und $\overrightarrow{MP}$, da sie in keinem Fall auf einer Geraden oder in einem Punkt liegen. Für die Parametergleichung folgt daraus:

$$H:\quad \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OM} + r\cdot\overrightarrow{MN} + t\cdot\overrightarrow{MP}.$$

Bestimme also

1. die Koordinaten von M und N durch das arithmetische Mittel,
2. die Koordinaten von P über M und h und
3. stelle die Parametergleichung der Ebene H auf.

1. Schritt: Koordinaten von M und N

M und N liegen jeweils in der Mitte der Strecken von A nach D und B nach C.
Die Mitte Z zwischen zwei Punkten X und Y berechnet sich allgemein über das arithmetische Mittel ihrer Koordinaten:

$$Z\left(\frac{y_1+x_1}{2}\,\middle|\,\frac{y_2+x_2}{2}\,\middle|\,\frac{y_3+x_3}{2}\right).$$

Für M und N folgt daraus:

$$M\left(\frac{d_1+a_1}{2}\,\middle|\,\frac{d_2+a_2}{2}\,\middle|\,\frac{d_3+a_3}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad M\left(\frac{164,4+0}{2}\,\middle|\,\frac{310,7+91,5}{2}\,\middle|\,\frac{76+76}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{M(82,2\,|\,201,1\,|\,76)}$$

$$N\left(\frac{c_1+b_1}{2}\,\middle|\,\frac{c_2+b_2}{2}\,\middle|\,\frac{c_3+b_3}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad N\left(\frac{286,4+122}{2}\,\middle|\,\frac{219,2+0}{2}\,\middle|\,\frac{76+76}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{N(204,2\,|\,109,6\,|\,76)}$$

2. Schritt: Koordinaten von P

Die Koordinaten von P lauten allgemein:

$P(m_1\,|\,m_2\,|\,m_3+h)$.

Setze die Koordinaten von M und $h=15,25$ ein und bestimme die Koordinaten von P:

$$P(82,2\,|\,201,1\,|\,76+15,25) \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{P(82,2\,|\,201,1\,|\,91,25)}.$$

3. Schritt: Parametergleichung der Ebene H

Die Parametergleichung von H lautet allgemein:

$$H:\quad \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OM} + r\cdot\overrightarrow{MN} + t\cdot\overrightarrow{MP}.$$

Bestimme also die Vektoren $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{MN}$ und $\overrightarrow{MP}$.

$\overrightarrow{OM}$ ist der Ortsvektor von M, er lautet damit:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 82,2 \\ 201,1 \\ 76 \end{pmatrix}.$$

$\overrightarrow{MN}$ ist der Verbindungsvektor von M und N. Seine Koordinaten berechnen sich aus der Differenz der beiden Endpunkte:

$$\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 204,2-82,2 \\ 109,6-201,1 \\ 76-76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 122 \\ -91,5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\overrightarrow{MP}$ ist der Verbindungsvektor von M und P:

$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 82,2-82,2 \\ 201,1-201,1 \\ 91,25-76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15,25 \end{pmatrix}.$$

Die Parametergleichung von H lautet somit:

$$H: \quad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 82,2 \\ 201,1 \\ 76 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 122 \\ -91,5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15,25 \end{pmatrix}.$$

2.3 ► **Nachweis, dass die obere Netzkante auf *g* liegt** (4P)

Es soll gezeigt werden, dass die obere Netzkante auf der Geraden g mit der Gleichung

$$g: \quad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 143,2 \\ 155,35 \\ 91,25 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 24,4 \\ -18,3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

liegt. Wir wissen, dass die Netzkante $15,25\,\text{cm}$ über der Tischplatte durch den von dir zuvor berechneten Punkt P verläuft. Zudem verläuft die Netzkante parallel zur Breite AB der Platte.

g muss also

- P enthalten und
- sein Richtungsvektor muss ein Vielfaches der Vektors $\overrightarrow{AB}$ sein.

Sind diese Bedingungen erfüllt, liegt die obere Netzkante auf g.

Du kannst die erste Bedingung dabei durch eine Punktprobe prüfen, indem du $\overrightarrow{OP}$ für $\overrightarrow{x}$ in der Geradengleichung einsetzt und nach s auflöst. Existiert ein gültiger Wert für s, liegt P auf g.

Die Parallelität von g zu AB ist dann gegeben, wenn der Richtungsvektor von g ein k-faches von $\overrightarrow{AB}$ mit $k \in \mathbb{R}$ ist. Es muss also einen Wert für k geben, für den gilt:

$$\overrightarrow{AB} = k \cdot \begin{pmatrix} 24,4 \\ -18,3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Prüfe die Bedingungen nacheinander:

1. Schritt: *g* enthält *P*

Führe die Punktprobe mit P durch:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 143,2 \\ 155,35 \\ 91,25 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 24,4 \\ -18,3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 82,2 \\ 201,1 \\ 91,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 143,2 \\ 155,35 \\ 91,25 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 24,4 \\ -18,3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teile die Gleichung in ein System mit drei Gleichungen auf:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 82,2 &=& 143,2 + 24,4r \\ \text{II} & 201,1 &=& 155,35 - 18,3r \\ \text{III} & 91,25 &=& 91,25 + \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & -61 &=& 24,4r \\ \text{II} & 45,75 &=& -18,3r \\ \text{III} & 0 &=& 0 \end{array}$$

Du siehst, dass III eine wahre Aussage darstellt, womit nur noch zwei Gleichungen mit der Variablen r übrigbleiben. Löse beide nach r auf, sind die Lösungen identisch, liegt P auf g:

$$\begin{array}{lrcll} \text{I} & -61 &=& 24,4r & \quad |:24,4 \\ \text{II} & 45,75 &=& -18,3r & \quad |:(-18,3) \\ \text{I} & r &=& -2,5 & \\ \text{II} & r &=& -2,5 & \end{array}$$

P liegt damit auf g.

2. Schritt: Der Richtungsvektor von *g* ist parallel zu $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}$ ist bereits zuvor berechnet worden und seine Koordinaten lauten

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 122 \\ -91,5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Setze $\overrightarrow{AB}$ in die Gleichung mit k ein:

$$\begin{pmatrix} 122 \\ -91,5 \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 24,4 \\ -18,3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teile die Gleichung in ihre drei Zeilen auf. Lässt sich jede Zeile mit dem gleichen k lösen, so sind die beiden Vektoren Vielfache voneinander:

$$\begin{array}{lrcrl} \text{I} & 122 & = & 24,4\ k & \quad \vert : 24,4 \\ \text{II} & -91,5 & = & -18,3\ k & \quad \vert : (-18,3) \\ \text{III} & 0 & = & 0\ k & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcr} \text{I} & 5 & = & k \\ \text{II} & 5 & = & k \\ \text{III} & 0 & = & 0 \end{array}$$

III ist für jedes k erfüllt, II und I für jeweils für $k = 5$. Die beiden Vektoren sind daher Vielfache voneinander.

Da der Punkt P der Netzebene in g liegt und die kürzere Seite AB parallel zu g ist, liegt die obere Netzkante auf g.

2.4 ► **Prüfung, ob der Ball ins Netz geht** (4P)

Wenn der Ball ins Netz geht, dann schneidet seine Flugbahn die Netzebene H dort, wo sich das Netz befindet.

Der Schnittpunkt B mit H muss daher so liegen, dass die Höhe x_3 der Balls sich zwischen Platte bei $x_3 = 76$ und oberer Netzkante bei $x_3 = 91,25$ befindet.

Die x_3-Koordinate von B muss sich daher im Intervall

$[76; 91,25]$

bewegen. Liegt sie darunter, trifft der Ball die Platte, liegt sie darüber, fliegt der Ball über das Netz.

Bestimme daher

1. den Schnittpunkt B der Geraden h mit der Ebene H und
2. prüfe, ob die x_3-Koordinate einen Wert im Intervall $[76; 91,25]$ annimmt.

1. Schritt: Schnittpunkt *B* der Geraden *h* mit *H*

Im Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene muss die Gleichung

$$\overrightarrow{x_h} = \overrightarrow{x_H}$$

eindeutige Lösungen für die Parameter s, r und t haben.

Setze die Gleichungen von h und H ein und teile das Ergebnis in seine drei Zeilen auf:

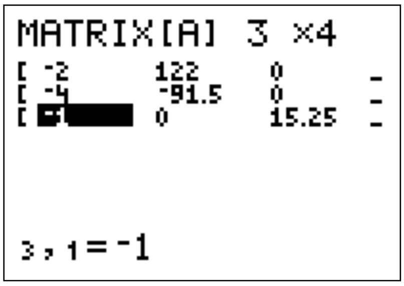
$$\begin{pmatrix} 220 \\ 310 \\ 150 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82,2 \\ 201,1 \\ 76 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 122 \\ -91,5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15,25 \end{pmatrix}$$

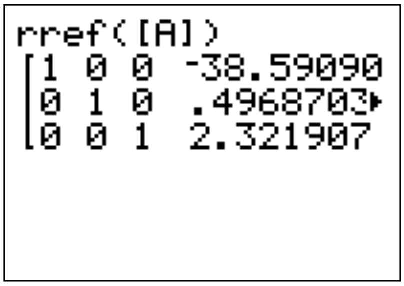
$$\begin{array}{llcl} \text{I} & 220 + 2s & = & 82,2 + 122r + 0 \\ \text{II} & 310 + 4s & = & 201,1 - 91,5r + 0 \\ \text{III} & 150 + 1s & = & 76 + 0 + 15,25t \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & 137{,}8 & = & -2s + 122r \\
\text{II} & 108{,}9 & = & -4s - 91{,}5r \\
\text{III} & 74 & = & -s \qquad\qquad + 15{,}25t
\end{array}$$

Löse dieses Gleichungssystem mithilfe des GTR.

Gehe in deinem GTR über $\boxed{\texttt{2ND} \to \texttt{MATRX} \to \texttt{EDIT}}$ in den Matrix-Editor und füge dort das Gleichungssystem ein. Verlasse diesen dann mit $\boxed{\texttt{2ND} \to \texttt{QUIT}}$ und gib im Anschluss den Befehl zum Lösen der Matrix über $\boxed{\texttt{2ND} \to \texttt{MATRX} \to \texttt{MATH} \to \texttt{ALPHA} \to \texttt{B}}$ ein. Die Matrix selbst kannst du mit $\boxed{\texttt{2ND} \to \texttt{MATRX} \to \texttt{NAMES}}$ einsetzen.





Der GTR liefert

$r \approx 0{,}4969, \qquad t \approx 2{,}3219 \qquad \text{und} \qquad s \approx -38{,}5909.$

Du kannst die Koordinaten des Ortsvektors $\overrightarrow{OB}$ nun durch Einsetzen von $s \approx -38{,}5909$ in die Geradegleichung von h ermitteln:

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 220 \\ 310 \\ 150 \end{pmatrix} - 38{,}5909 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 - 77{,}1818 \\ 310 - 156{,}3636 \\ 150 - 38{,}5909 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 142{,}8182 \\ 153{,}6364 \\ 111{,}4091 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten von B lauten damit:

$B(142{,}8182 \,|\, 153{,}6364 \,|\, 111{,}4091).$

2. Schritt: Prüfung, ob der Ball das Netz trifft

Damit der Ball das Netz trifft, muss sich die x_3-Koordinate von B im im Intervall

$[76; 91{,}25]$

bewegen. Mit

$x_3 \approx 111{,}4091$

ist dies jedoch nicht erfüllt. Der Ball fliegt über das Netz.

Da der Schnittpunkt der Flugbahn mit der Netzebene sich also oberhalb des Netzes befindet, trifft der Ball das Netz nicht.