2. a) ▶ **Bestimmen des Zeitpunkts t_E des stärksten Wachstums** (8P)

Die Funktion f_k mit $f_k(t) = t \cdot e^{-kt}$ mit $k \in \mathbb{R}^+,\ t \in \mathbb{R}_0^+$ beschreibt die Wachstumsrate in Anzahl pro Liter und Minute.

Der Zeitpunkt t_E des stärksten Wachstums entspricht also der t-Stelle des Maximums dieser Funktion.

Du kannst so vorgehen:

- Bestimme zunächst die ersten beiden Ableitungen von f_k
- Prüfe mit dem notwendigen Kriterium $f_k'(t) = 0$, wo sich mögliche Extremstellen befinden.
- Untersuche die **Art** dieser Extremstellen
- Bestimme zuletzt über $f_k(t)$ die Wachstumsrate zum Zeitpunkt t.

1. Schritt: Ableitungen bestimmen

$$\begin{aligned} f_k'(t) &= 1 \cdot e^{-kt} + t \cdot (-k) \cdot e^{-kt} \\ &= e^{-kt} - k \cdot t \cdot e^{-kt} && \mid e^{-kt} \text{ ausklammern} \\ &= (1 - k \cdot t) \cdot e^{-kt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_k''(t) &= (-k) \cdot e^{-kt} + (1-kt) \cdot e^{-kt} \cdot (-k) \\ &= -ke^{-kt} - (1-kt) \cdot k \cdot e^{-kt} && \mid e^{-kt} \text{ ausklammern} \\ &= e^{-kt} \cdot (-k - (1-kt) \cdot k) \\ &= e^{-kt} \cdot ((-k - k + k^2 t) \cdot k) \\ &= e^{-kt} \cdot (k^2 t - 2k) \end{aligned}$$

2. Schritt: Bestimmen möglicher Extremstellen

Mögliche Extremstellen einer Funktion befinden sich an den Nullstellen der ersten Ableitung der Funktion.

Setze also $f_k'(t) = 0$ und löse nach t auf:

$$0 = (1 - k \cdot t_E) \cdot e^{-kt_E}$$

Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist. e-Funktionen können nicht Null werden. Du kannst also die Klammer $(1 - k \cdot t_E)$ Null setzen, um die Nullstellen der Ableitung zu bestimmen.

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - k \cdot t_E && \mid +k \cdot t_E \\ k \cdot t_E &= 1 && \mid : k \\ t_E &= \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Extrema sind bei der Stelle $t_E = \dfrac{1}{k}$ möglich.

3. Schritt: Art der Extrema bestimmen

Du hast jetzt berechnet, an welcher Stelle sich möglicherweise ein Extremum befindet. Du musst jedoch noch überprüfen, ob dort tatsächlich ein Maximum liegt. Dies kannst du entweder über die zweite Ableitung nachrechnen oder über den Verlauf des Graphen der ersten Ableitung begründen.

▶▶ Lösungsweg A: Überprüfung über die zweite Ableitung

Um festzustellen, ob an einer Stelle, an der sich möglicherweise ein Extremum befindet, ein Maximum liegt, kannst du die zu überprüfende Stelle in die zweite Ableitung einsetzen. Wenn $f_k''(t_E) < 0$ gilt, dann ist die hinreichende Bedingung für ein Maximum erfüllt.

$$\begin{aligned} f_k''(t_E) &= (k^2 \cdot t_E - 2k) \cdot \mathrm{e}^{-kt_E} \\ &= (k^2 \cdot \frac{1}{k} - 2k) \cdot \mathrm{e}^{-k \cdot \frac{1}{k}} \\ &= (k - 2k) \cdot \mathrm{e}^{-1} \\ &= -1k \cdot \mathrm{e}^{-1} \\ &\approx -0{,}37 \cdot k \end{aligned}$$

Da $k > 0$ ist, gilt für alle k $f_k''(t_E) < 0$.
An der Stelle t_E liegt das Maximum der Funktion f_k.
Der Zeitpunkt des stärksten Wachstums ist $\boldsymbol{t_E = \frac{1}{k}}$.

▶▶ Lösungsweg B: Überprüfung am Verlauf des Graphen der Ableitung

Ein Maximum kennzeichnet sich dadurch, dass an dieser Stelle die Steigung von steigend, also positiv, nach fallend, also negativ wechselt.
Die erste Ableitung f_k' mit $f_k'(t) = (1 - k \cdot t) \cdot \mathrm{e}^{-kt}$ beschreibt die Steigung der Funktion. e^{-kt} ist immer positiv. Der Vorzeichenwechsel der Ableitung an ihrer Nullstelle t_E wird also von $(1 - k \cdot t)$ bestimmt. Dies entspricht dem Funktionsterm einer Geraden mit positivem y-Achsenabschnitt und negativer Steigung. Eine solche Gerade hat eine Nullstelle, bei der das Vorzeichen von positiv nach negativ wechselt.
Die Steigung der Funktion f_k wechselt also bei $t_E = \frac{1}{k}$ von positiv nach negativ. Entsprechend liegt an dieser Stelle ein Maximum.
Der Zeitpunkt des stärksten Wachstums ist $\boldsymbol{t_E = \frac{1}{k}}$.

▶ Bestimmen der Wachstumsrate zum Zeitpunkt $\boldsymbol{t_E}$

Die Funktion f_k mit $f_k(t) = t \cdot \mathrm{e}^{-kt}$ beschreibt die Wachstumsrate. Die Wachstumsrate zum Zeitpunkt t_E entspricht also dem Funktionswert von t_E. Setze also $t_E = \frac{1}{k}$ in die Funktionsgleichung ein und berechne den zugehörigen Funktionswert.

$$\begin{aligned} f_k(t_E) &= t_E \cdot \mathrm{e}^{-kt_E} \\ &= \frac{1}{k} \cdot \mathrm{e}^{-k \cdot \frac{1}{k}} \\ &= \frac{1}{k} \cdot \mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$

Der Wachstumsrate zum Zeitpunkt des stärksten Wachstums ist $\boldsymbol{f_k(t_E) = \frac{1}{k} \cdot \mathrm{e}^{-1}}$.

b) ► **Bestimmen der Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f_k** (5P)

Analog zu oben kannst du so vorgehen:

- Bestimme zunächst die dritte Ableitung von f_k
- Prüfe mit dem notwendigen Kriterium $f_k''(t) = 0$, wo sich mögliche Wendestellen befinden.
- Untersuche, ob es sich tatsächlich um Wendestellen handelt
- Bestimme zuletzt über $f_k(t)$ die zugehörige y-Koordinate.

1. Schritt: Ableitung bestimmen

$$\begin{aligned} f_k'''(t) &= k^2 \cdot \mathrm{e}^{-kt} + (k^2t - 2k) \cdot (-k) \cdot \mathrm{e}^{-kt} \\ &= k^2 \cdot \mathrm{e}^{-kt} - (k^3t - 2k^2) \cdot \mathrm{e}^{-kt} && \mid \ \mathrm{e}^{-kt} \text{ ausklammern} \\ &= \mathrm{e}^{-kt} \cdot \left(k^2 - (k^3t - 2k^2)\right) \\ &= \mathrm{e}^{-kt} \cdot \left(k^2 - k^3t + 2k^2\right) \\ &= \mathrm{e}^{-kt} \cdot \left(3k^2 - k^3t\right) \end{aligned}$$

2. Schritt: Bestimmen möglicher Wendestellen

Setze $f_k''(t) = 0$ und löse die Gleichung nach t:

$$\begin{aligned} f_k''(t) &= 0 \\ 0 &= (k^2 \cdot t_W - 2k) \cdot \mathrm{e}^{-kt_W} \end{aligned}$$

Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist. e-Funktionen können nicht Null werden. Du kannst also die Klammer $(k^2 \cdot t - 2k)$ Null setzen, um die Nullstellen der Ableitung zu bestimmen.

$$\begin{aligned} 0 &= k^2 \cdot t_W - 2k \\ 0 &= k \cdot (k \cdot t_W - 2) \end{aligned}$$

Laut Aufgabenstellung ist $k \in \mathbb{R}^+$. Damit ist k auf jeden Fall **größer** als Null. Es genügt also, wenn du die Klammer alleine Null setzt:

$$\begin{aligned} 0 &= k \cdot t_W - 2 && \mid +2 \\ k \cdot t_W &= 2 && \mid :k \\ t_W &= \frac{2}{k} \end{aligned}$$

Wendepunkte können an der Stelle $t_W = \dfrac{2}{k}$ liegen.

3. Schritt: Überprüfen, ob bei t_W ein Wendepunkt liegt

Ob an der Stelle t_W tatsächlich ein Wendepunkt liegt, kannst du über die dritte Ableitung, Lösungsweg A, oder durch die Überprüfung, ob die zweite Ableitung an dieser Stelle t_W das Vorzeichen wechselt, Lösungsweg B.

►► Lösungsweg A: Überprüfung über die dritte Ableitung

Um festzustellen, ob an einer möglichen Wendestelle tatsächlich ein Wendepunkt liegt, kannst du die zu überprüfende Stelle in die dritte Ableitung einsetzen. Wenn $f_k'''(t) \neq 0$ gilt, dann ist die hinreichende Bedingung für eine Wendestelle erfüllt.

$$\begin{aligned} f_k'''(t_W) &= (-k^3 \cdot t_W + 3 \cdot k^2) \cdot \mathrm{e}^{-kt_W} \\ &= (-k^3 \cdot \frac{2}{k} + 3 \cdot k^2) \cdot \mathrm{e}^{-k \cdot \frac{2}{k}} \\ &= (-2 \cdot k^2 + 3 \cdot k^2) \cdot \mathrm{e}^{-2} \\ &= k^2 \cdot \mathrm{e}^{-2} \end{aligned}$$

Da weder das Quadrat einer Zahl noch eine e-Funktion Null werden, gilt $f_k'''(t_W) \neq 0$.

Die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt ist somit erfüllt. An dieser Stelle befindet sich also tatsächlich ein Wendepunkt.

Der Wendepunkt des Graphen der Funktion f_k liegt bei $t_W = \frac{2}{k}$.

►► Lösungsweg B: Überprüfung am Verlauf des Graphen der zweiten Ableitung

Bei einem Wendepunkt des Graphen einer Funktion ändert sich deren Krümmung. Die zweite Ableitung der Funktion beschreibt ihr Krümmungsverhalten. Wenn sich das Vorzeichen dieser Ableitung ändert, ändert sich die Krümmungsrichtung der Funktion und es gibt einen Wendepunkt. Um zu überprüfen, ob sich an einer möglichen Wendestelle tatsächlich eine befindet, kannst du also erläutern, dass und warum es sich um eine echte Nullstelle der zweiten Ableitung handelt.

$f_k''(t) = (-k^3 \cdot t + 3 \cdot k^2) \cdot \mathrm{e}^{-kt}$

e-Funktionen haben keine Nullstellen. Die Nullstellen werden also vom anderem Faktor der Gleichung bedingt: $-k^3 \cdot t + 3 \cdot k^2$

Die Funktion f_k und ihre Ableitungen haben die Variable t. Der Faktor $-k^3 \cdot t + 3 \cdot k^2$ entspricht also einer Geraden. Geraden haben eine Nullstelle. An dieser muss sich das Vorzeichen der Funktion also ändern.

Die zweite Ableitung hat also eine echte Nullstelle. Das Krümmungsverhalten ändert sich an der zu überprüfenden Stelle t_W. An dieser Stelle befindet sich also tatsächlich ein Wendepunkt.

Der Wendepunkt des Graphen der Funktion f_k liegt bei $t_W = \frac{2}{k}$.

5. Schritt: Berechnung des Funktionswerts des Wendepunkts

Du hast nun bereits die Wendestelle t_W berechnet. Um den zugehörigen Funktionswert $f_k(t_W)$ zu bestimmen, musst du diesen Wert für t in die Funktionsgleichung einsetzen.

$$\begin{aligned} f_k(t_W) &= t_W \cdot \mathrm{e}^{-kt_W} \\ &= \frac{2}{k} \cdot \mathrm{e}^{-k \cdot \frac{2}{k}} \\ &= \frac{2}{k} \cdot \mathrm{e}^{-2} \end{aligned}$$

Der Wendepunkt hat den Funktionswert $f_k(t_W) = \frac{2}{k} \cdot \mathrm{e}^{-2}$.

Der Wendepunkt hat die Koordinaten $\boldsymbol{W\left(\frac{2}{k} \mid \frac{2}{k} \cdot \mathrm{e}^{-2}\right)}$.

► Angabe der Bedeutung des Wendepunkts im Sachzusammenhang

Der Wendestelle ist das Extremum der ersten Ableitung einer Funktion. Am Wendepunkt ist also die Steigung der Funktion extrem.

Die Funktion f_k beschreibt die Wachstumsrate der Bakterien in einem belichtetem Wasserbecken. Für $t > \frac{1}{k}$ fällt der Graph der Funktion streng monoton. Entsprechend ist der Wendepunkt der **Zeitpunkt, an dem die Wachstumsrate der Bakterien am stärksten abnimmt**.

Dieser Zeitpunkt ist nach der doppelten Zeit erreicht, nach der das stärkste Wachstum erreicht war.

c) ▶ **Bestimmen der Stammfunktion** (7P)

Bestimme zunächst die allgemeine Stammfunktionen, von der sich alle Stammfunktionen der Funktion durch einen Summanden unterscheiden und bestimme anschließend aus dieser allgemeinen Stammfunktion diejenige, die die Bedingung $F_k(0) = 1$ erfüllt.

1. Schritt: Bestimmen der allgemeinen Stammfunktionen

Die Stammfunktion der Funktion f_k mit $f_k(t) = t \cdot \mathrm{e}^{-kt}$ kannst du über partielle Integration bestimmen:

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u'v$$

Dabei ist es wichtig, die Faktoren der Funktion so auf u und v' zu verteilen, sodass du von $u'v$ die Stammfunktion bilden kannst.

$$u = t \quad \Longrightarrow \quad u' = 1$$
$$v' = \mathrm{e}^{-kt} \quad \Longrightarrow \quad v = -\frac{1}{k} \cdot \mathrm{e}^{-kt}$$

$$\begin{aligned}
\int t \cdot \mathrm{e}^{-kt} \mathrm{d}t &= t \cdot \left(-\frac{1}{k} \cdot \mathrm{e}^{-kt}\right) - \int -\frac{1}{k} \cdot \mathrm{e}^{-kt} \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{k} \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-kt} - \left[\frac{1}{k^2} \cdot \mathrm{e}^{-kt}\right] + C \\
&= -\frac{1}{k} \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-kt} - \frac{1}{k^2} \cdot \mathrm{e}^{-kt} + C \\
&= \frac{-k \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-kt} - \mathrm{e}^{-kt}}{k^2} + C \\
&= \frac{(-k \cdot t - 1) \cdot \mathrm{e}^{-kt}}{k^2} + C
\end{aligned}$$

Die allgemeine Stammfunktion der Funktion f_k lautet:

$$\boldsymbol{F_k(t) = \frac{(-k \cdot t - 1) \cdot \mathrm{e}^{-kt}}{k^2} + C.}$$

2. Schritt: Berechnen von C

Du sollst C so berechnen, dass $F_k(0) = 1$ gilt.

Hierzu musst du das C, durch das sich alle möglichen Stammfunktionen unterscheiden, so berechnen, dass diese Bedingung erfüllt ist. Hierzu setzt du die Bedingung in die Gleichung der allgemeinen Stammfunktion ein und löst nach C auf:

$F_k(0) = 1$

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{(-k \cdot 0 - 1) \cdot \mathrm{e}^{-k \cdot 0}}{k^2} + C \\
&= \frac{-\mathrm{e}^0}{k^2} + C \\
&= \frac{-1}{k^2} + C \qquad \left| +\frac{1}{k^2}\right. \\
C &= 1 + \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

Es muss $C = 1 + \frac{1}{k^2}$ gelten, damit für die Stammfunktion F_k der Funktion f_k gilt $F_k(0) = 1$. Um die Stammfunktion zu berechnen, für die dies gilt, musst du also dieses C in die allgemeine Stammfunktion einsetzen. Verrechne es anschließend so, dass du die in der Aufgabenstellung angegebene Gleichung erhältst.

$$\begin{aligned}
F_k(t) &= \frac{(-k \cdot t - 1) \cdot \mathrm{e}^{-kt}}{k^2} + 1 + \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{(-k \cdot t - 1) \cdot \mathrm{e}^{-kt}}{k^2} + \frac{k^2}{k^2} + \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{1 + k^2 + (-k \cdot t - 1) \cdot \mathrm{e}^{-kt}}{k^2} \\
&= \frac{1 + k^2 - (k \cdot t + 1) \cdot \mathrm{e}^{-kt}}{k^2}
\end{aligned}$$

Die Stammfunktion F_k, für die gilt $F_k(0) = 1$ lautet:

$$\boldsymbol{F_k(t) = \frac{1 + k^2 - (k \cdot t + 1) \cdot \mathrm{e}^{-kt}}{k^2}}$$

▶ Bedeutung der Stammfunktion im Sachzusammenhang

Die Funktion f_k gibt die Wachstumsrate der Bakterien in Anzahl pro Liter und Minute an. Dies entspricht der Konzentrationsänderung der Bakterien.

Die Stammfunktion F_k dieser Funktion f_k beschreibt somit die **Konzentration der Bakterien**, also die Anzahl der Bakterien pro Liter zum Zeitpunkt t. Die Konzentration zum Zeitpunkt $t = 0$ ist dabei 1. Zu Beginn befindet sich also pro Liter eine Bakterie in dem Wasserbecken.

d) **▶ Zeichnen der Graphen der Funktion $f_{0,5}$ und ihrer Stammfunktion $F_{0,5}$** (7P)

Vom Graphen der Funktion f_k hast du im ersten Aufgabenteil bereits wichtige Punkte berechnet. Setze in diese das angegebene $k = 0,5$ ein:

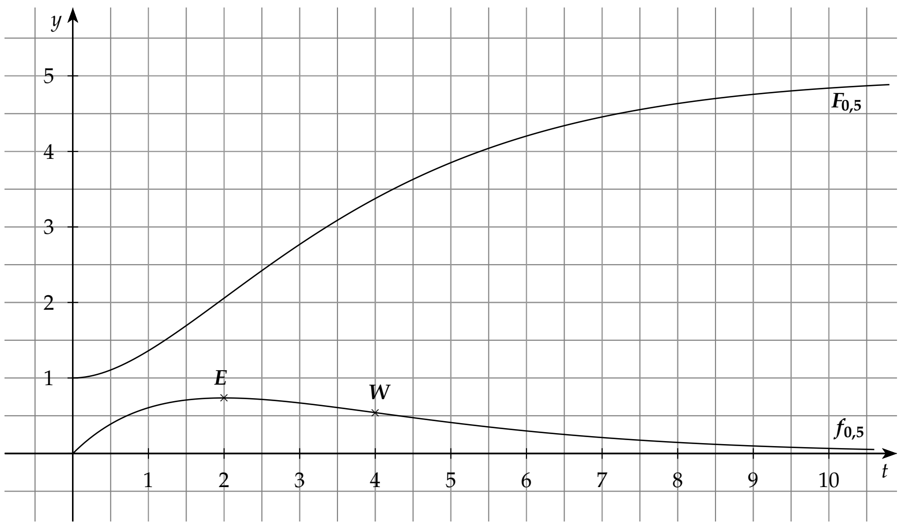
Hochpunkt: $E_k\left(\frac{1}{k} \mid \frac{1}{k} \cdot \mathrm{e}^{-1}\right) \quad \Longrightarrow \quad E_{0,5}\,(2 \mid 0,74)$

Wendepunkt: $W_k\left(\frac{2}{k} \mid \frac{2}{k} \cdot \mathrm{e}^{-2}\right) \quad \Longrightarrow \quad W_{0,5}\,(4 \mid 0,54)$

Von der Stammfunktion F_k kennst du jedoch bis jetzt nur den y-Achsenabschnitt.

Berechne im zu zeichnenden Bereich $0 \leq t \leq 10$ einige Punkte der Graphen beider Funktionen, durch die du dann die Graphen der beiden Funktionen zeichnen kannst. Dies kannst du, je nach Taschenrechner, auch über dessen Tabellenfunktion.

Zeitpunkt t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_{0,5}(t)$	0	$0,61$	$0,74$	$0,67$	$0,54$	$0,41$	$0,3$	$0,21$	$0,15$	$0,1$	$0,07$
$F_{0,5}(t)$	1	$1,36$	$2,06$	$2,77$	$3,38$	$3,85$	$4,2$	$4,46$	$4,63$	$4,76$	$4,84$



▶ Beschreiben des Einflusses des Parameters k auf die Graphen von f_k und F_k

Betrachte, um über den Einfluss des Parameters k auf das Aussehen der Graphen beschreiben zu können, zunächst die Funktionsgleichung und die Koordinaten des Extrem- und des Wendepunkts. Beschreibe so zunächst den Einfluss des Parameters k auf den Verlauf des Graphen der Funktion f_k. Schließe von diesem dann auf den Verlauf des Graphen von F_k. Der Graph von F_k ist der Graph der Stammfunktion der Funktion f_k und hängt somit vom Verlauf des Graphen der Funktion f_k ab.

Das Aussehen des Graphen der Funktion f_k mit $f_k(t) = t \cdot \mathrm{e}^{-kt}$ ist abhängig vom Parameter k, der im Exponenten der e-Funktion steht.

Je größer der Exponent einer e-Funktion, desto größer der Funktionswert. Für t gilt $t \in \mathbb{R}_0^+$ und für k gilt $k \in \mathbb{R}^+$. Die e-Funktion hat also immer einen negativen Exponent. Je größer der Betrag des Exponenten, desto kleiner ist der Exponent. Je größer k, desto größer ist der Betrag des Exponenten. Der Funktionswert ist also umso kleiner, je größer k ist.

Die Lage des Extrem- und des Wendepunkts ist ebenfalls vom Parameter k abhängig:

$$E\left(\frac{1}{k} \mid \frac{1}{k} \cdot \mathrm{e}^{-1}\right)$$

$$W\left(\frac{2}{k} \mid \frac{2}{k} \cdot \mathrm{e}^{-2}\right)$$

Je größer k ist, desto kleiner sind also die t-Werte des Extrem- und Wendepunkts und desto kleiner ihre Funktionswerte.

Die Stammfunktion F_k beschreibt den Inhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion f_k. Je weniger unter dem Graph der Funktion f_k ist, desto kleiner die Funktionswerte der Funktion F_k.

Als vier Aussagen über das Aussehen der Graphen der Funktionen f_k und F_k in Abhängigkeit des Parameters k lässt sich so sagen:

Je größer k, desto ...

1. **flacher verläuft der Graph der Funktion f_k.**
2. **weiter links und tief liegt der Extrempunkt des Graphen der Funktion f_k.**
3. **weiter links und tief liegt der Wendepunkt des Graphen der Funktion f_k.**
4. **flacher verläuft der Graph der Funktion F_k.**

e) ▶ **Begründung einer endlichen Zahl als Grenzwert** (3P)

Die Funktion F_k beschreibt den Inhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion f_k. Die Fläche unter dem Graphen einer Funktion hat einen endlichen Grenzwert, wenn die Funktion für $t \to \infty$ gegen Null strebt. Dies kannst du anhand der Funktionsgleichung begründen.

Die Funktion f_k mit $f_k(t) = t \cdot \mathrm{e}^{-kt}$ setzt sich zusammen aus zwei Funktionen g mit $g(t) = t$ und h_k mit $h_k(t) = \mathrm{e}^{-kt}$. Der eine Bestandteil g ist der Term einer ganzrationalen Funktion ersten Grades, der andere h_k der einer Exponentialfunktion. Eine Exponentialfunktion strebt schneller gegen ihren Grenzwert als die ganzrationale Funktion ersten Grades. Somit entspricht der Grenzwert der Funktion dem Grenzwert der Exponentialfunktion.

Eine Exponentialfunktion mit negativen Exponenten strebt gegen Null.

Es gilt also:

$$\lim_{t\to\infty} f_k(t) = 0$$

Die Funktion f_k strebt für $t \to \infty$ gegen Null.

Der Flächeninhalt unter des Graphen einer gegen Null strebenden Funktion strebt gegen eine endliche Zahl. Entsprechend strebt die Stammfunktion F_k für $t \to \infty$ gegen eine endliche Zahl.

▶ **Bestimmen des Grenzwerts von F_k**

Die Stammfunktion F_k lautet $F_k(t) = \dfrac{1+k^2-(1+k\cdot t)\cdot \mathrm{e}^{-kt}}{k^2}$.

Deren Grenzwert musst du nun für $t \to \infty$ berechnen. Teile dazu zunächst den Bruch auf, sodass du den von t unabhängigen Teil abtrennst und lasse dann t gegen Unendliche streben.

$$\frac{1+k^2-(1+k\cdot t)\cdot \mathrm{e}^{-kt}}{k^2} = \frac{1+k^2}{k^2} - \frac{(1+k\cdot t)\cdot \mathrm{e}^{-kt}}{k^2}$$

Untersuche nun den Grenzwert der Stammfunktion, indem du das Verhalten des von t abhängigen Teils für $t \to \infty$ untersuchst:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} F_k(t) &= \frac{1+k^2}{k^2} - \lim_{t\to\infty} \frac{(1+k\cdot t)\cdot \mathrm{e}^{-kt}}{k^2} \\
&= \frac{1}{k^2} + 1 - \lim_{t\to\infty} \frac{(1+k\cdot t)\cdot \mathrm{e}^{-kt}}{k^2} \\
&= \frac{1}{k^2} + 1 - \lim_{t\to\infty} \left[(1+k\cdot t)\cdot \mathrm{e}^{-kt}\right]\cdot \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{1}{k^2} + 1 - \lim_{t\to\infty} \left[\frac{(1+k\cdot t)}{\mathrm{e}^{\,kt}}\right]\cdot \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{1}{k^2} + 1 - \lim_{t\to\infty} \left[\frac{k}{t\cdot \mathrm{e}^{\,kt}}\right]\cdot \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{1}{k^2} + 1 - 0 \\
&= \frac{1}{k^2} + 1
\end{aligned}$$

Die Funktionswerte $F_k(t)$ streben, wenn t gegen Unendlich strebt, gegen die feste Zahl $\boldsymbol{\frac{1}{k^2} + 1}$.

► Angabe der Bedeutung des Grenzwerts im Sachzusammenhang

Die Stammfunktion F_k beschreibt, wie in Aufgabenteil c bereits angegeben, die Konzentration der Bakterien. **Die Konzentration der Bakterien nähert sich von unten einem festen Wert an, ist also nach oben begrenzt**, wobei diese Konzentration abhängig ist von unterschiedlichen Faktoren, die sich in der Zeitkonstante k widerspiegeln.