a) (1) ▶ **Bestimmen der Richtung, in die von S aus gegraben werden muss** (11P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass sich in einem Bergwerk ein Tunnel befindet, der geradlinig durch die Punkte $A(73 \mid -16 \mid -24)$ und $B(7 \mid 17 \mid -2)$ zum Ausgang im Punkt R verläuft. Vom Punkt S mit $S(45 \mid 10 \mid 0)$ werden nun geradlinig Stollen gegraben, die auf ebendiesen Tunnel treffen.

Deine Aufgabe ist es, die Richtung zu bestimmen, in die von S aus gegraben werden muss, damit ein Stollen auf den Punkt A trifft. Die Richtung, in welche hier gegraben werden muss, wird festgelegt durch einen Vektor. Willst du die Richtung bestimmen, in die von S aus gegraben werden muss, damit ein Stollen auf A trifft, bestimmst du also den Vektor, welcher von S aus in Richtung von A zeigt.

$$\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 45 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73-45 \\ -16-10 \\ -24-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ -26 \\ -24 \end{pmatrix}.$$

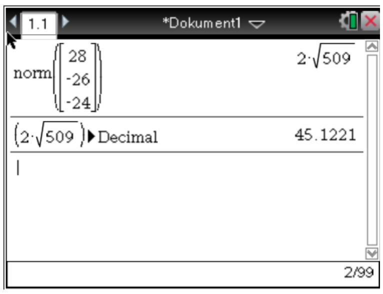
$\Longrightarrow$ Von S aus muss ein Stollen in Richtung des Vektors $\overrightarrow{SA} = \begin{pmatrix} 28 \\ -26 \\ -24 \end{pmatrix}$ gegraben werden.

(2) ▶ **Berechnen der Länge des Stollens**

Nun sollst du die Länge des Stollens, welcher Punkt S und Punkt A verbindet, berechnen. Beachte dabei, dass eine Längeneinheit insgesamt 10 m entspricht (1 LE = 10 m). Vektor $\overrightarrow{SA}$, welchen du eben bestimmt hast, gibt dazu nicht nur die Richtung des Stollens zwischen S und A an, er repräsentiert auch gleichzeitig dessen Länge.

Ermittle die Länge des Stollens also über die Länge des Vektors $\overrightarrow{SA}$. Berechne dazu den Betrag des Vektors $\overrightarrow{SA}$, mit deinem CAS. Verwende dazu den Befehl `menu → 7:Matrix/Vektor → 7:Normen → 1:Norm`.

Somit beträgt die Länge ca. 45,12 LE. Die Aufgabe gibt dir vor, dass gilt 1 LE=10 m. Multipliziere also die berechnete Länge mit dem Faktor 10 um die Länge in Metern zu erhalten.



$\Longrightarrow$ Die Länge des Stollens beträgt also etwa 451,2 m.

(3) ▶ **Berechnen der Größe des Winkels, in welchem der Stollen auf den Tunnel trifft**

Weiterhin sollst du die Größe des Winkels α berechnen, in welchem der Stollen zwischen S und A auf den Tunnel, der geradlinig durch die Punkte A und B verläuft, trifft. Die Richtung des Tunnels, der geradlinig durch die Punkte A und B verläuft, kann durch den Vektor $\overrightarrow{AB}$ beschrieben werden. Willst du nun berechnen, in welchem Winkel α der Stollen auf den Tunnel trifft, so berechnest du den Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{SA}$ und $\overrightarrow{AB}$.

Für den Winkel α zwischen zwei beliebigen Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gilt dabei:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}.$$

Bevor du jedoch den hier gesuchten Winkel α bestimmen kannst, ermittelst du Vektor $\overrightarrow{AB}$, welcher die Richtung des Tunnels beschreibt.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

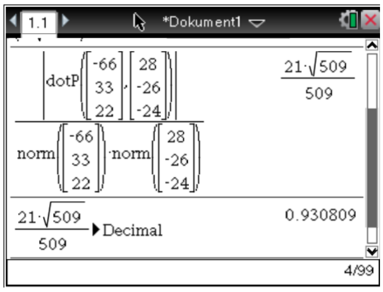
Setze nun $\overrightarrow{SA}$ und $\overrightarrow{AB}$ in die oben gezeigte Formel für α ein und berechne den Winkel wie folgt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{SA}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{SA}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 28 \\ -26 \\ -24 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 28 \\ -26 \\ -24 \end{pmatrix}\right|}$$

Berechne diesen Term mit dem CAS. Den Befehl für das Skalarprodukt findest du unter `menu → 7:Matrix/Vektor → C: Vektor → 3:Skalarprodukt`.

Den Befehl für den Betrag eines Vektors findest du unter `menu → 7:Matrix/Vektor → 7:Normen → 1:Norm`.
Damit ergibt sich die Gleichung:

$$\cos(\alpha) = 0{,}931 \overset{\cos^{-1}}{\Rightarrow} \alpha \;=\; 21{,}44^{\circ}.$$



$\Longrightarrow$Der Stollen trifft unter einem Winkel von $21{,}44^{\circ}$ auf den Tunnel.

(4) ▶ **Ermitteln der Koordinaten von R**

Der Ausgang des Tunnels befindet sich im Punkt R. Der Aufgabenstellung kannst du dabei entnehmen, dass dieser Punkt R sich auf der Erdoberfläche befinden muss. Die Erdoberfläche befindet sich dabei in der x-y-Ebene.

Deine Aufgabe ist es nun, die Koordinaten dieses Punktes R zu berechnen.
Beschreibe dazu zunächst den Tunnel durch die Punkte A und B durch eine Gerade g_{AB}. Da eine Gerade stets einen Stütz- und Richtungsvektor benötigt, kannst du hier den Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ von Punkt A als Stütz- und den Vektor $\overrightarrow{AB}$ als Richtungsvektor von Gerade g_{AB} verwenden.

Die Koordinaten von R ergeben sich als Schnittpunkt von Gerade g_{AB} und der Erdoberfläche, welche durch die x-y-Ebene beschrieben wird. Gehe beim Berechnen der Koordinaten von R so vor:

- Bestimme eine Gleichung der Geraden g_{AB}.
- Alle Punkte auf der x-y-Ebene haben eine z-Koordinate von Null. Setze also $z = 0$ in die Geradengleichung der Geraden g_{AB} ein und bestimme so den Parameterwert für s.
- Löse nach den verbliebenen Koordinaten x und y auf und bestimme so die vollständigen Koordinaten von R.

1. Schritt: Bestimmen einer Gleichung der Geraden g_{AB}

Wählst du $\overrightarrow{OA}$ als Stütz- und $\overrightarrow{AB}$ als Richtungsvektor von g_{AB}, so ergibt sich die Gleichung der Geraden g_{AB} zu:

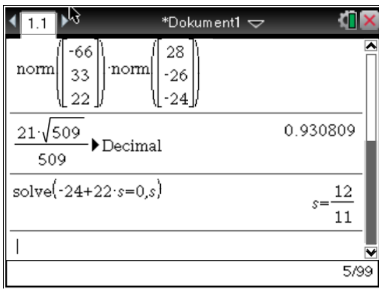
$$g_{AB}: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

2. Schritt: Bestimmen der Koordinaten von R

Setze nun $z = 0$ in die Geradengleichung von g_{AB} ein und bestimme zunächst den zugehörigen Parameterwert für s:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Gleichung für Parameterwert s ergibt sich mit $-24 + 22 \cdot s = 0$. Löse diese Gleichung mit dem `solve`-Befehl deines CAS.



Mit $s = \frac{12}{11}$ ergeben sich die vollständigen Koordianten von R zu:

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} + \frac{12}{11} \cdot \begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$Der Tunnel beginnt im Punkt R mit $R(1 \mid 20 \mid 0)$ an der Erdoberfläche.

b) ▶ **Ermitteln der Koordinaten des Punktes P, in dem der Stollen auf den Tunnel trifft** (4P)

Ein zweiter Stollen verläuft nun vom Punkt S aus in Richtung des Vektors $\vec{u}$, mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3{,}5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Deine Aufgabe ist es, die Koordinaten des Punktes P, in dem dieser Stollen auf den Tunnel trifft, zu berechnen.

Oben hast du den Tunnel, welcher geradlinig durch die Punkte A und B verläuft, durch Gerade g_{AB} beschrieben:

$$g_{AB}: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Willst du nun jenen Punkt P berechnen, indem der behandelte Stollen auf den Tunnel trifft, so beschreibst du diesen Stollen zunächst als eine Gerade s. Gerade s besitzt dabei als Stützvektor den Ortsvektor $\overrightarrow{OS}$ von Punkt S und als Richtungsvektor den angegebenen Vektor $\vec{u}$.

Hast du Gerade s definiert, so setzt du diese mit der Geraden g_{AB} gleich, denn die Koordinaten des gesuchten Punktes P entsprechen den Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden s mit der Geraden g_{AB}. Hast du g_{AB} und s gleichgesetzt, so löst du das resultierende lineare Gleichungssystem und ermittelst mit den bestimmten Parameterwerten die Koordinaten von P.

1. Schritt: Ermitteln einer Geradengleichung der Geraden s

Wie oben schon erwähnt, besitzt Gerade s als Stützvektor den Ortsvektor $\overrightarrow{OS}$ von Punkt S und als Richtungsvektor den Vektor $\vec{u}$. Eine Gleichung von Gerade s bestimmst du also so:

$$s: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OS} + t \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 45 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -4 \end{pmatrix}.$$

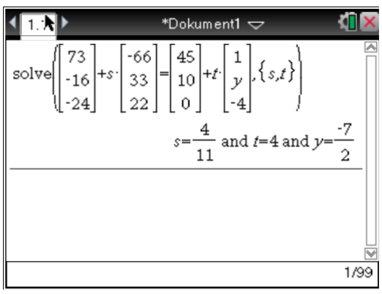
2. Schritt: Gleichsetzen von s und g_{AB} und Lösen des LGS

Setze nun die Gleichung der Geraden s mit der Gleichung der Geraden g_{AB} gleich und löse nach Parameter s und t:

$$\overrightarrow{x_{g_{AB}}} = \overrightarrow{s}$$

$$\begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -4 \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung kannst du mit deinem CAS-Rechner lösen. Verwende dafür den `solve`-Befehl.



Als Lösung des Gleichungssystems ergibt sich also: $t = 4$, $s = \frac{4}{11}$ sowie $y = -3,5$. Damit kannst du zunächst den Vektor $\vec{u}$ vervollständigen zu

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3,5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

3. Schritt: Bestimmen der Koordinaten von P

Setze nun $t = 4$ in s oder $s = \frac{4}{11}$ in g_{AB} ein, um die Koordianten von P zu bestimmen. Hier setzen wir beispielsweise $t = 4$ in die Geradengleichung von s ein:

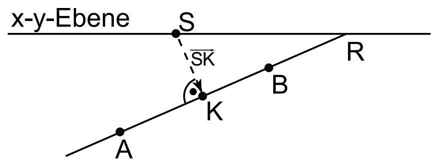
$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 45 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3,5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ -4 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Die Koordinaten des Punktes P, in welchem der Stollen auf den Tunnel trifft, sind $P(49 \mid -4 \mid -16)$.

c) ▶ **Bestimmen der Richtung, in welche gegraben werden muss und die Koordinaten von K** (6P)

Nun soll vom Punkt S aus der kürzeste Stollen gegraben werden, der zum Tunnel führt. Deine Aufgabe ist es dabei, die Richtung zu bestimmen, in welche gegraben werden muss und die Koordinaten von Punkt K, in dem der Stollen auf den Tunnel trifft. Hier soll der **kürzeste** Stollen gegraben werden, das heißt, du bestimmst die Koordinaten von Punkt K so, dass die Entfernung zwischen diesem und dem Punkt S am kleinsten ist.

Punkt K liegt dabei irgendwo auf der Geraden g_{AB}. Die kleinste Entfernung zwischen einem Punkt und einer Geraden entspricht immer dem Abstand zwischen diesen. Der Abstand entspricht wiederum der Länge des Vektors, welcher rechtwinklig auf der Geraden g_{AB} steht und durch den Punkt S verläuft.



Du fällst also ein Lot von Punkt S aus auf die Gerade g_{AB}, welchen den Tunnel beschreibt. Der dabei bestimmte Lotvektor entspricht dann der Richtung, in welche gegraben werden muss und die Koordinaten des sogenannten Lotfußpunktes entsprechen dann den gesuchten Koordinaten von K. Gehe dabei so vor:

- Definiere eine Hilfsebene H. Diese Hilfsebene H verläuft senkrecht zur Geraden g_{AB} und durch den Punkt S. Bestimme eine Gleichung dieser Geraden in Koordinatenform.
- Bestimme die Koordinaten des Schnittpunkts von Gerade g_{AB} und Hilfsebene H. Der Schnittpunkt von g_{AB} und H entspricht dann dem gesuchten Lotfußpunkt bzw. dem gesuchten Punkt K.
- Ermittle mit den Koordinaten von S und K die Richtung, in welche gegraben werden muss.

1. Schritt: Ermitteln einer Ebenengleichung von H in Koordinatenform

Allgemein lautet die Gleichung einer Ebenen in Koordinatenform:

$H: n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = d$, wobei

- n_1, n_2 und n_3 die Einträge des Normalenvektors $\overrightarrow{n}$ der Ebene sind und
- d eine durch Punktprobe zu ermittelnde Konstante ist.

Da die Hilfsebene H senkrecht zur Geraden g_{AB} verlaufen soll, kann der Vektor $\overrightarrow{AB}$ als Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der Hilfsebene H fungieren, d.h.:

$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix}$ in H:

$H: -66 \cdot x + 33 \cdot y + 22 \cdot z = d$

Weiterhin soll nach obiger Angabe Punkt S in Ebene H liegen. Pass also über eine Punktprobe mit den Koordinaten von S die Konstante d an und bestimme so die vollständige Gleichung der Ebenen H in Koordinatenform:

$S(45 \mid 10 \mid 0)$ in H:

$$\begin{aligned} -66 \cdot 45 + 33 \cdot 10 + 22 \cdot 0 &= d \\ -2.970 + 330 + 0 &= d \\ -2.640 &= d \end{aligned}$$

Eine vollständige Ebenengleichung von H in Koordinatenform lautet also:

$H: -66 \cdot x + 33 \cdot y + 22 \cdot z = -2.640.$

2. Schritt: Bestimmen der Koordinaten des Schnittpunkts K von H und g_{AB}

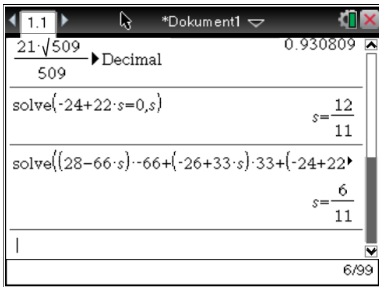
Um die Koordinaten des Schnitt- bzw. Lotfußpunktes K der Geraden g_{AB} und Hilfsebenen H berechnen zu können, formst du g_{AB} zunächst in einen von s abhängigen Vektor um: g_{AB} :

$\overrightarrow{x_{AB}} = \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 - 66 \cdot s \\ -16 + 33 \cdot s \\ -24 + 22 \cdot s \end{pmatrix}.$

Setze nun, wie im Aufgabenteil a, die Einträge dieses Vektors für x, y und z in die Ebenengleichung der Hilfsebene H ein. Löse anschließend die resultierende Gleichung nach Parameter s, um mit diesen und g_{AB} die Koordinaten von K bestimmen zu können.

Löse die folgende Gleichung mit dem `solve`-Befehl deines CAS.

$$-66 \cdot (73 - 66 \cdot s) + 33 \cdot (-16 + 33 \cdot s) + 22 \cdot (-24 + 22 \cdot s) = -2.640$$



Setze nun $s = \frac{6}{11}$ in die Geradengleichung von g_{AB} ein, um den Ortsvektor $\overrightarrow{OK}$ bzw. die Koordinaten von K zu bestimmen:

$$\overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} + \frac{6}{11} \cdot \begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -36 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

$\Longrightarrow$ Im Punkt $K(37 \mid 2 \mid -12)$ trifft der Stollen auf den Tunnel.

Alternativ: Bestimmen des Lotfußpunktes über das Skalarprodukt

Nach den obigen Angaben soll der Lotfußpunkt bzw. der Punkt K irgendwo auf der Geraden g_{AB} liegen. Die Gleichung dieser Geraden hast du in einem vorherigen Aufgabenteil bestimmt, diese war:

$$g_{AB} : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun das Lot vom Punkt S aus auf die Gerade g_{AB}, welche den Tunnel beschreibt, fällen. Da der Lotfußpunkt K auf Gerade g_{AB} liegen soll, besitzt dieser in Abhängigkeit von Parameter s folgenden Ortsvektor:

$$\overrightarrow{OK}_s = \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 - 66 \cdot s \\ -16 + 33 \cdot s \\ -24 + 22 \cdot s \end{pmatrix}.$$

Da das Lot von Punkt S aus auf die Gerade g_{AB} gefällt werden soll, müssen der Vektor $\overrightarrow{SK}$ und der Richtungsvektor der Geraden g_{AB} orthogonal zueinander verlaufen. Verlaufen zwei Vektoren orthogonal zueinander, so besitzt ihr Skalarprodukt einen Wert von Null. Bilde also den von s abhängigen Vektor $\overrightarrow{SK}_s$ und berechne das Skalarprodukt mit dem Richtungsvektor der Geraden g_{AB}. Setze dieses gleich Null und löse die resultierende Gleichung nach Parameter s. Mit dem resultierenden Wert für s und der Gleichung der Geraden g_{AB} kannst du die Koordinaten von Punkt K, an welchem der Stollen auf den Tunnel trifft, berechnen.

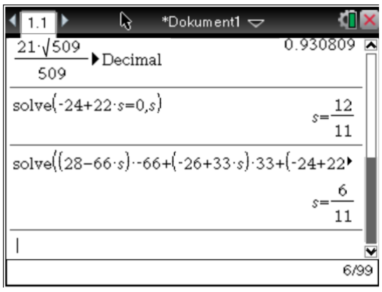
Vektor $\overrightarrow{SK}$ in Abhängigkeit von s: $\overrightarrow{SK}_s = \begin{pmatrix} 73 - 66 \cdot s \\ -16 + 33 \cdot s \\ -24 + 22 \cdot s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 45 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 - 66 \cdot s \\ -26 + 33 \cdot s \\ -24 + 22 \cdot s \end{pmatrix}.$

Skalarprodukt:

$$\begin{pmatrix} 28-66\cdot s \\ -26+33\cdot s \\ -24+22\cdot s \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix} = 0$$

$$(28-66\cdot s)\cdot(-66)+(-26+33\cdot s)\cdot 33+(-24+22\cdot s)\cdot 22 = 0$$

Löse die folgende Gleichung mit dem `solve`-Befehl deines CAS.



Setze $s = \frac{6}{11}$ in die Geradengleichung von g_{AB} ein, um die Koordinaten von Punkt K zu berechnen:

$$\overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} + \tfrac{6}{11}\cdot\begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -36 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

$\Longrightarrow$ Im Punkt $K(37 \mid 2 \mid -12)$ trifft der Stollen auf den Tunnel.

3. Schritt: Bestimmen der Richtung, in welche gegraben werden muss

Aus den vorherigen Lösungsschritten weißt du, dass der Stollen im Punkt K mit den Koordinaten $K(37 \mid 2 \mid -12)$ auf den Tunnel trifft. Willst du nun die Richtung bestimmen, in welche vom Punkt S aus gegraben werden muss, so bildest du den Vektor $\overrightarrow{SK}$:

$$\overrightarrow{SK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 37 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 45 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -12 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$\Longrightarrow$ Vom Punkt S aus muss in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ gegraben werden.

d) ▶ **Ebenengleichung der Ebene ABS aufstellen** (5P)

Eine Ebene wird immer eindeutig durch drei Punkte aufgespannt. Dabei dient ein Punkt dazu den Stützvektor zu erhalten. Die verbleibenden beiden Punkte werden dann zum Aufstellen der Richtungsvektoren benötigt. Die Ebenengleichung in Parameterform baut sich dann auf über:

$$ABS:\ \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + s\cdot\overrightarrow{AB} + t\cdot\overrightarrow{AS}$$

Die Koordinatengleichung erhältst du dann über den Normalenvektor der Ebene mit:

$ABS:\ n_1\cdot x + n_2\cdot y + n_3\cdot z = \overrightarrow{n}\circ\overrightarrow{OA}$, wobei $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ der Normalenvektor der Ebene ist.

Gehe also wie folgt vor.

1. Stelle die Parametergleichung der Ebene ABS auf
2. Berechne über das Vektorprodukt der Richtungsvektoren den Normalenvektor
3. Bestimme die Koordinatengleichung über die oben stehende Form

1. Schritt: Parametergleichung aufstellen

Wähle zunächst als Stützvektor den Vektor $\overrightarrow{OA}$, der die Form

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix}$$

hat. Die Richtungsvektoren ergeben sich dann mit $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AS}$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 45 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 26 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich die Parameterform der Ebene ABS mit:

$$ABS : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -28 \\ 26 \\ 24 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Normalenvektor berechnen

Die Richtungsvektoren hast du eben bestimmt. Berechne nun den gesuchten Normalenvektor mit:

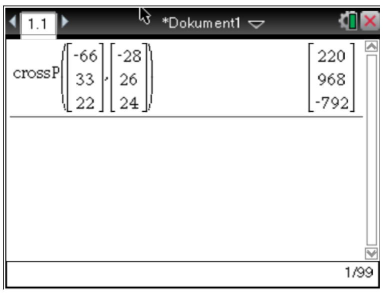
$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS}$$

Du kannst mit deinem CAS das Vektorprodukt über

`menu → 7:Matrix/Vektor → C:Vektor → 2: Kreuzprodukt`.

Der Vektor, der sich ergibt ist der gesuchte Normalenvektor der Ebene ABS. Dieser lautet folglich:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 220 \\ 968 \\ -792 \end{pmatrix}$$



3. Schritt: Koordinatengleichung bestimmen

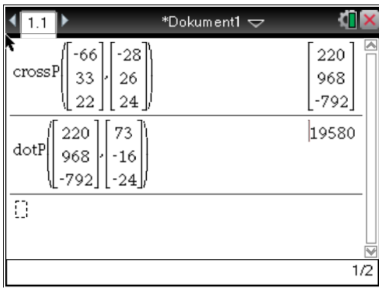
Nun hast du alle benötigten Informationen zusammen, um die gesuchte Koordinatengleichung der Form

$$ABS:\ n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = \overrightarrow{n} \circ \overrightarrow{OA}$$

aufzustellen. Setzt man nun den Normalenvektor ein, so erhält man die folgende Ebenengleichung.

$$ABS:\ 220 \cdot x + 968 \cdot y - 792 \cdot z = \begin{pmatrix} 220 \\ 968 \\ -792 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt kannst nun noch mit deinem Rechner bestimmen. Den Befehl dazu findest du unter `menu → 7:Matrix/Vektor → C:Vektor → 3:Skalarprodukt`.



Damit ergibt sich die vollständige Koordinatengleichung mit:

$$ABS:\ 220 \cdot x + 968 \cdot y - 792 \cdot z = 19.580$$

▶ Schnittgerade bestimmen

Um die Schnittgerade zu bestimmen, stelle zunächst ein Gleichungssystem aus den beiden Koordinatengleichungen der Ebene E und der Ebene ABS auf. Dieses hat dann die Form

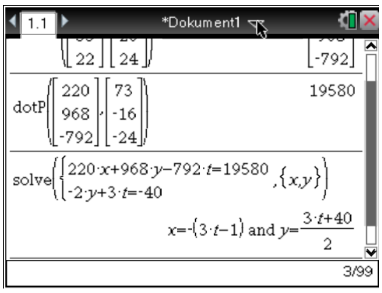
$$\begin{array}{llcl} \text{I} & 220 \cdot x + 968 \cdot y - 792 \cdot z & = & 19.580 \\ \text{II} & -2y + 3z & = & -40 \end{array}$$

Dabei handelt es sich um ein unterbestimmtes Gleichungssystem, das du nur in Abhängigkeit von einem Parameter lösen kannst. Setze $z = t$. Der Parameter t ist am Ende der Parameter, von dem die Geradengleichung abhängt.

Damit ergibt sich das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{array}{llcl} \text{I} & 220 \cdot x + 968 \cdot y - 792 \cdot t & = & 19.580 \\ \text{II} & -2y + 3t & = & -40 \end{array}$$

Löse dieses Gleichungssystem mit dem CAS über `menu → 3:Algebra → 7: Gleichungssystem lösen`



Somit ergeben sich die Lösungen der Gleichung mit:

$$x = -3 \cdot t + 1 \qquad y = \frac{3}{2} \cdot t + 20 \qquad z = t$$

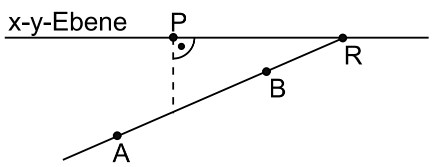
Daraus kannst du nun die Schnittgerade s zusammensetzen, indem du jede Koordinate als eine Zeile der Geradengleichung auffasst.

$$s : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

e) ▸ **Berechnen der Koordinaten des Punktes, für die Bohrung an der Erdoberfläche** (4P)

In einer Entfernung von 140 m vom Punkt B auf der Strecke $\overline{AB}$ soll ein zur Erdoberfläche senkrechter Notausstieg enden. Deine Aufgabe ist es nun, die Koordinaten des Punktes zu bestimmen, an welchen die Bohrung an der Erdoberfläche dabei beginnen muss.

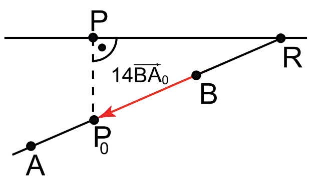
Beim Lösen dieser Aufgabe kann es sinnvoll sein, wenn du dir eine Skizze des Sachverhalts in der Seitenansicht erstellst. Achte beim Zeichnen der Skizze darauf, dass der Notausstiegstunnel (in der Skizze gestrichelt) an der Erdoberfläche, welche durch die x-y-Ebene repräsentiert wird, enden muss und dass dieser rechtwinklig zu dieser Ebene verläuft.



Willst du ausgehend davon die Koordinaten des Punktes P bestimmen, an welchem der Notausstiegstunnel an der Erdoberfläche endet, so musst du zunächst jenen Punkt auf der Strecke $\overline{AB}$ bestimmen, an welchem der Notausstiegstunnel auf den Tunnel trifft.

Nutze dazu die Information, dass der Notausstieg in 140 m Entfernung vom Punkt B auf der Strecke $\overline{AB}$ enden soll. Aus der Aufgabenstellung weißt du, dass eine Längeneinheit hier 10 m entspricht. Das heißt, der Punkt an welchem der Notausstieg auf der Strecke $\overline{AB}$ enden soll ist 14 LE vom Punkt B entfernt.

Um also vom Punkt B zu jenem Punkt P_0 zu „gelangen", an welchem der Notausstieg im Tunnel enden soll, musst du 14 LE entlang der Strecke $\overline{BA}$ in der Richtung des Vektors $\overrightarrow{BA}$ „gehen". Dazu musst du jenen Vektor bestimmen, welcher die Richtung des Vektors $\overrightarrow{BA}$ hat und eine Länge von 1 besitzt.



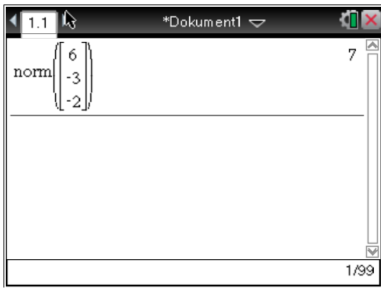
Das heißt, du normierst den Vektor $\overrightarrow{BA}$ auf eine Länge von 1 und addierst diesen dann insgesamt 14 Mal zum Ortsvektor $\overrightarrow{OB}$ des Punktes B. Hast du Punkt P_0 bestimmst, so überlege dir, wie dessen Koordinaten verändert werden müssen, damit dieser in der x-y-Ebene bzw. der Erdoberfläche liegt.

1. Schritt: Bestimmen der Koordinaten von P_0

Willst du den auf eine Länge von 1 normierten Vektor $\overrightarrow{BA}_0$ bestimmen, so bestimmst du den Vektor $\overrightarrow{BA}$ und multiplizierst diesen mit dem Kehrbruch seiner Länge, welche du über den Betrag des Vektors $\overrightarrow{BA}$ berechnest.

Vektor $\overrightarrow{BA}$: $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ -33 \\ -22 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Normierter Vektor $\overrightarrow{BA}_0$. Bestimme den Betrag von $\overrightarrow{BA}_0$ mit deinem CAS-Rechner. Den Befehl dafür findest du unter `menu → 7:Matrix/Vektor → 7:Normen → 1:Norm`



$$\overrightarrow{BA}_0 = \frac{1}{\left|\overrightarrow{BA}\right|} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bestimme nun, wie oben beschrieben, die Koordinaten von P_0:

$$\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{OB} + 14 \cdot \overrightarrow{BA}_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ -2 \end{pmatrix} + 14 \cdot \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ -2 \end{pmatrix} + \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Der Notausstieg befindet sich im Tunnel im Punkt $P_0(19 \mid 11 \mid -6)$.

2. Schritt: Bestimmen der Koordinaten von P

Der Punkt P_0, an welchem sich der Notausstieg im Tunnel befindet, hat eine z-Koordinate von 6 und befindet sich damit 60 m unterhalb der Erdoberfläche. Da die Erdoberfläche durch die x-y-Ebene repräsentiert wird, besitzt jeder Punkt, welcher in dieser Ebene liegt, eine z-Koordinate von Null. Da der Notausstiegstunnel senkrecht zur Erdoberfläche bzw. der x-y-Ebene verlaufen soll, musst du lediglich die z-Koordinate von P_0 auf Null setzen, um die gesuchten Koordinaten von Punkt P zu bestimmen:

P hat also die Koordinaten: $P(19 \mid 11 \mid 0)$.

$\Longrightarrow$ Im Punkt P mit $P(19 \mid 11 \mid 0)$ muss die Bohrung für den Notausstiegstunnel an der Erdoberfläche begonnen werden.