a) **► Untersuchen der Funktion:** (15BE)

1. Schritt: Nullstellen

Für Nullstellen gilt: $f_b(x) = 0$. Also:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{5}{x} - 5bx && \mid +5bx \\ 5bx &= \frac{5}{x} && \mid \cdot x \\ 5bx^2 &= 5 && \mid : 5b \\ x^2 &= \frac{1}{b} && \mid \sqrt{(...)} \\ x_{1/2} &= \pm\sqrt{\tfrac{1}{b}} \end{aligned}$$

Also hat f_b Nullstellen bei $x_1 = \sqrt{\frac{1}{b}}$ und bei $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{b}}$.

2. Schritt: Polstellen

Die Polstelle befindet sich bei der Nullstelle des Nennerpolynoms, also bei $x = 0$.

3. Schritt: Verhalten im Unendlichen

Mit $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{5}{x} = 0$ erhältst du:

$f_b(x) = \left(\dfrac{5}{x} - 5b \cdot x\right) \longrightarrow -\infty$ (für $x \longrightarrow +\infty$) und
$f_b(x) = \left(\dfrac{5}{x} - 5b \cdot x\right) \longrightarrow +\infty$ (für $x \longrightarrow -\infty$)

► Nachweis der Eigenschaften:

1. Schritt: Monotonie

Eine Funktion ist monoton fallend, wenn ihre Ableitung an jeder Stelle kleiner Null ist.
Ableiten liefert dir:

$$f_b'(x) = -\frac{5}{x^2} - 5b = -\left(\frac{5}{x^2} + 5b\right)$$

Die Ableitung ist kleiner null, da $b > 0$ und $x^2 > 0$.

2. Schritt: Punktsymmetrie

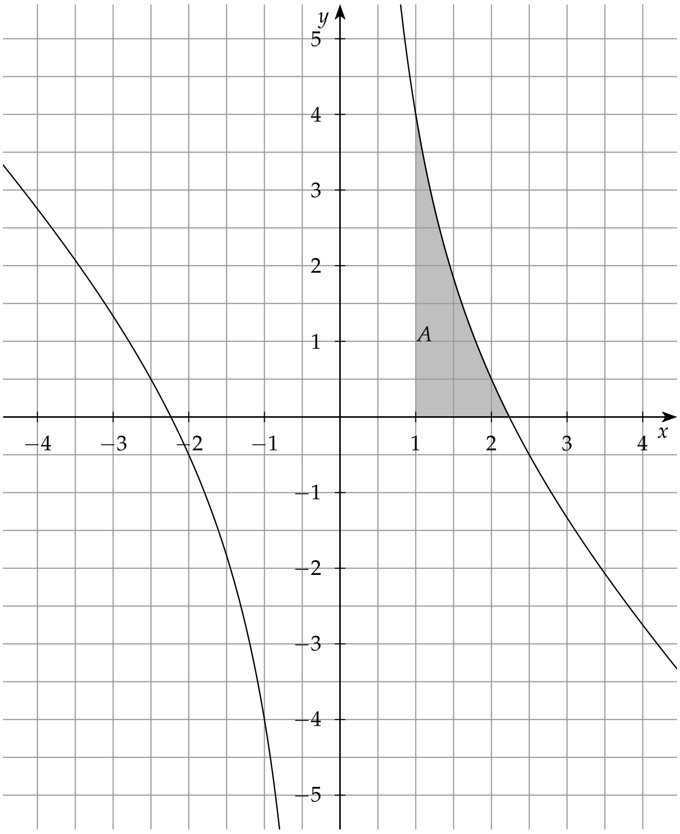
Eine Funktion ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung wenn gilt:
$f(x) = -f(-x)$.
Überprüfen liefert dir:

$$\begin{aligned} \frac{5}{x} - 5bx &= -\left(\frac{5}{-x} - 5b(-x)\right) \\ &= -\left(-\frac{5}{x} + 5bx\right) \\ &= \frac{5}{x} - 5bx \end{aligned}$$

▶ Graph zeichnen:

Wertetabelle:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f_{\frac{1}{5}}(x)$	$2,75$	$1,3$	$-0,5$	4	-	4	$0,5$	$-1,3$	$-2,75$



b) **▶ Maßzahl des Flächeninhalts berechnen:** (5BE)

Zur Berechnung des Integrals benötigst du die obere und die untere Grenze. Aus der Gleichung $x = 1$ erhältst du die untere Grenze 1. Die obere Grenze ist die erste Nullstelle für $x \leq 1$. Aus Aufgabenteil a) entnimmst du $x = \sqrt{5}$. Dies liefert dir folgendes Integral für die Fläche A:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^{\sqrt{5}} \left(\frac{5}{x} - x\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[5 \cdot \ln|x| - \frac{1}{2}x^2\right]_1^{\sqrt{5}} \\
&= 5 \cdot \ln\left(\sqrt{5}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(5 \cdot \ln(1) - \frac{1}{2} \cdot 1^2\right) \\
&= 5 \cdot \ln\left(\sqrt{5}\right) - \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 5 \cdot \ln\left(\sqrt{5}\right) - 2 \\
&\approx 2,02
\end{aligned}
$$

Also gilt für die gesuchte Fläche: $A \approx 2,02$.

c) ▶ **Entwickeln einer Gleichung:** (10BE)

Aus der Aufgabenstellung entnimmst du, dass die Fläche A_{ges} des Spiegels $2\,\text{m}^2$ beträgt. Diese Fläche setzt sich aus einem Rechteck mit $A_R = 2x \cdot z$ und einem Halbkreis mit $A_H = \frac{1}{2}\pi \cdot x^2$ zusammen.
Daraus erhältst du für die gesamte Fläche des Spiegels:
$2 = A_{ges} = A_R + A_H = 2x \cdot z + \frac{1}{2}\pi \cdot x^2.$
Umstellen nach z liefert dir die gewünschte Gleichung:

$$\begin{aligned} 2 &= 2x \cdot z + \frac{1}{2}\pi \cdot x^2 && \mid -\tfrac{1}{2}\pi \cdot x^2 \\ 2x \cdot z &= 2 - \frac{1}{2}\pi \cdot x^2 && \mid : 2x \\ z &= \frac{1}{x} - \frac{1}{4}\pi \cdot x \end{aligned}$$

▶ **Optimale Maße berechnen:**

Um die gewünschten Maße bei minimalen Kosten zu berechnen, musst du die Funktion K auf Extremwerte untersuchen. Dazu bestimmst du die Nullstellen der ersten Ableitung von K.

$$\begin{aligned} 0 = K'(x) &= 50 \cdot \left(\frac{3}{4}\pi + 1 - \frac{1}{x^2}\right) && \mid : 50 \\ 0 &= \frac{3}{4}\pi + 1 - \frac{1}{x^2} && \mid +\tfrac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^2} &= \frac{3}{4}\pi + 1 && \mid \cdot x^2 \\ 1 &= \left(\frac{3}{4}\pi + 1\right) \cdot x^2 && \mid : \left(\tfrac{3}{4}\pi + 1\right) \\ \frac{1}{\frac{3}{4}\pi + 1} &= x^2 && \mid \sqrt{(\ldots)} \\ x &\approx 0,546 \end{aligned}$$

Um zu überprüfen, ob bei $x = 0,546$ ein Minimum vorliegt, berechnest du den Funktionswert der zweiten Ableitung an der Stelle x.

$K''(x) = 50 \cdot \frac{2}{x^3}.$

$x = 0,546$ in $K''(x)$ einsetzen liefert:

$K''(0,546) = 50 \cdot \frac{2}{(0,546)^3} = 614,4$

Da $614,4 > 0$ ist, sind für $x = 0,546\,\text{m}$ die Kosten des Spiegelrahmens minimal.

Die Länge von z erhältst du aus dem Zusammenhang zwischen x und z:

$z = \frac{1}{0,546} - \frac{1}{4}\pi \cdot 0.546 \approx 1,403$

Somit hat der Spiegel bei minimalen Kosten die Maße $0,546\,\text{m}$ x $1,403\,\text{m}$.