a) ► **Symmetrie des Graphen begründen** (11P)

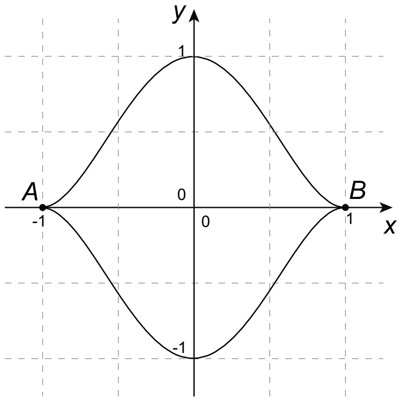
Du sollst anhand des Funktionsterms begründen, dass der Graph von f symmetrisch zur y-Achse ist.

Beim Graphen einer ganzrationalen Funktion, ist dies der Fall, wenn nur gerade Exponenten im Funktionsterm auftreten.

► **Funktionsgleichung von f aufstellen**

Du sollst einen Funktionsterm von f aufstellen und hast folgende Informationen gegeben:

1. Die Steigung des Graphen von f in den beiden Punkten A und B soll jeweils den Wert Null haben.
2. f soll folgende Form haben: $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$.



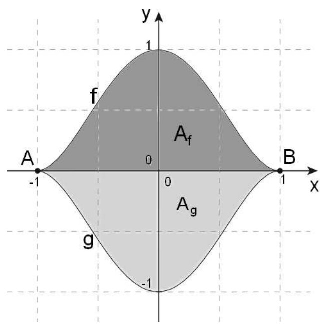
Du sollst also die Parameterwerte von a, b und c bestimmen. Dazu benötigst du drei Gleichungen, mit deren Hilfe du ein Gleichungssystem aufstellen kannst.

Dieses kannst du dann mit dem GTR lösen und so die Parameterwerte von a, b und c bestimmen. Zwei der drei Gleichungen kannst du aufstellen, indem du die Koordinaten zweier Punkte aus dem Schaubild abliest. Die dritte erhältst du mit Hilfe der Information 1.

b) ► **Materialkosten berechnen** (10P)

Du sollst überprüfen, ob die Forderung eingehalten werden kann, dass die Materialkosten für das Logo höchstens 75 € betragen sollen, wenn das Material 34 € je Quadratmeter kostet. Dazu musst du die gesamten Materialkosten K berechnen:

$K = A \cdot P$, wobei A der Flächeninhalt des Logos und P der Preis pro Quadratmeter ist.
Wobei gilt: $A = A_f + A_g$, wie du auf dem Schaubild rechts sehen kannst. Wegen der Symmetrie von f und g gilt: $\left|A_f\right| = \left|A_g\right| \Rightarrow A = 2 \cdot A_f$



Berechne also zuerst den Inhalt der Fläche A_f und darüber den Flächeninhalt A. Anschließend kannst du die Materialkosten berechnen.

► **Größte Steigung des oberen Randes berechnen**

Du sollst nun überprüfen, ob die Forderung erfüllt werden kann, dass die größte Steigung des oberen Randes des Logos mindestens $1{,}5$ betragen soll.

Der obere Rand des Logos wird durch den Graphen der Funktion f dargestellt. Das bedeutet, du sollst überprüfen, ob die maximale Steigung des Graphen von f zwischen den beiden Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ mindestens $1{,}5$ beträgt. Die Steigung des Graphen von f wird durch die erste Ableitung f' von f beschrieben.

Berechne also das Maximum von f' und vergleiche es mit dem geforderten Wert. Überprüfe anschließend, ob dies zwischen den beiden Nullstellen von f liegt.

c) ▶ **Geraden in das Koordinatensystem einzeichnen** (13P)

Das Logo soll durch die beiden Geraden $g_1(x) = x$ und $g_2(x) = -x$ in vier Flächenstücke geteilt werden. Du sollst nun die beiden Geraden g_1 und g_2 in das Koordinatensystem in der Anlage zeichnen.

Aus den Funktionstermen der Geraden kannst du den y-Achsenabschnitt, sowie die Steigung ablesen. Eine Gerade g mit dem Funktionsterm $g(x) = a \cdot x + b$ hat die Steigung a und den y-Achsenabschnitt b.

Über die Geraden $g_1(x) = x$ hast du demnach folgende Informationen gegeben:

- Die Steigung ist 1.
- Der y-Achsenabschnitt ist 0.

Die Gerade g_1 hat demnach die Eigenschaft: $y = x$ für alle Punkte auf der Geraden g_1. Demnach ist g_1 die Winkelhalbierende des Schnittwinkels der beiden Koordinatenachsen im 1. und 3. Quadranten.

Für die Gerade $g_2(x) = -x$ gilt entsprechend:

- Die Steigung ist -1.
- Der y-Achsenabschnitt ist 0.

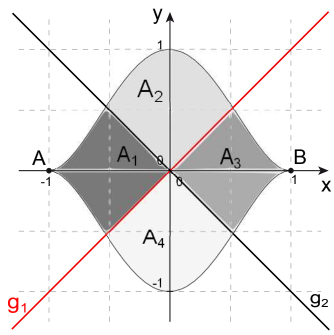
Die Gerade g_2 hat demnach die Eigenschaft: $y = -x$ für alle Punkte auf der Geraden g_2. Demnach ist g_2 die Winkelhalbierende des Schnittwinkels der beiden Koordinatenachsen im 2. und 4. Quadranten.

▶ **Größe der Flächenstücke berechnen**

Du sollst nun, die Größe der vier Flächenstücke A_1, A_2, A_3 und A_4 berechnen, die rechts in der Graphik eingezeichnet sind.

Du hast folgende Informationen:

- Die Graphen von f und g sind symmetrisch zur y-Achse
- Der Graph von g entsteht durch Spiegelung des Graphen von f an der x-Achse.
- Anhand der Funktionsterme kannst du sehen, dass für die Geraden g_1 und g_2 ebenfalls gilt $g_1(x) = -g_2(x)$. Die Gerade g_1 entsteht also durch Spiegelung der Geraden g_2 an der x-Achse bzw. an der y-Achse.



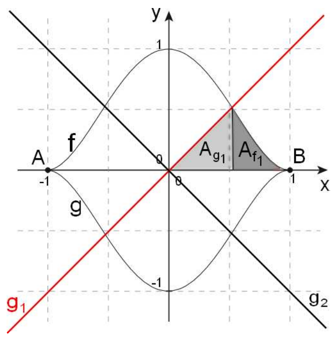
Daraus folgt:
- $A_1 = A_3$
- $A_2 = A_4$

A_1 und A_3

Berechne zuerst den Flächeninhalt A_3 und damit auch den Flächeninhalt A_1.

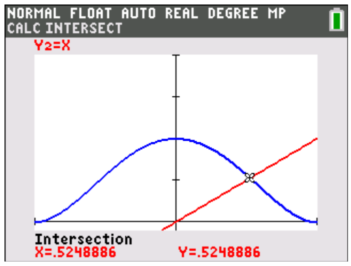
Der Flächeninhalt A_3 setzt sich zusammen aus zwei Teilflächeninhalten. Den Inhalt der Teilfläche oberhalb der x-Achse und den der Teilfläche unterhalb der x-Achse.

Wegen der Symmetrie des Logos, sind diese Teilflächen gleich groß. Berechne also zunächst nur den Inhalt der oberen Teilfläche und verdopple diesen anschließend. Die obere Teilfläche kannst du wieder in zwei Teilflächen aufteilen:

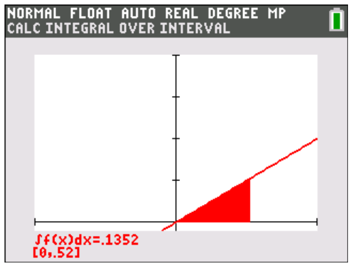


- A_{g_1}: Der Inhalt der Fläche zwischen der Geraden g_1 und der x-Achse vom Ursprung bis zum Schnittpunkt S_1 von g_1 mit dem Graphen von f.
- A_{f_1}: Der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse vom Schnittpunkt S_1 bis zur Nullstelle von f.

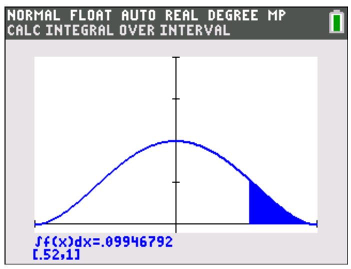
Damit gilt dann insgesamt: $A_1 = A_3 = 2 \cdot \left(A_{g_1} + A_{f_1}\right)$, wobei:
$A_{g_1} = \int_0^{x_2} g_1(x)\mathrm{d}x$ und $A_{f_1} = \int_{x_2}^{1} f(x)\mathrm{d}x$, da die Nullstelle von f bei $x = 1$ liegt.



x_2 ist die Schnittstelle von f und g_1. Diese musst du zunächst noch mit dem GTR berechnen. Gib dazu beide Funktionsterme im `Y=`-Menü des GTR ein und lass dir die Graphen anzeigen. Unter $\boxed{\texttt{2ND} \to \texttt{TRACE(CALC)} \to \texttt{5: intersect}}$ kannst du nun den Schnittpunkt S_1 bestimmen.



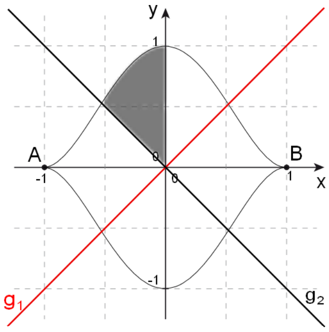
Der GTR liefert dir das Ergebnis:
$S_1(0,52 \mid 0,52)$.
Damit kennst du nun auch $x_2 = 0,52$. Die beiden Integrale kannst du nun wie oben mit dem GTR berechnen.
Tust du dies nacheinander für A_{g_1} und A_{f_1} erhältst du das Ergebnis:



$$\begin{aligned} A_1 &= 2 \cdot \left(A_{g_1} + A_{f_1}\right) \\ &= 2 \cdot \left(\int_0^{0,52} g_1(x)\mathrm{d}x + \int_{0,52}^{1} f(x)\mathrm{d}x\right) \\ &= 2 \cdot (0,1352 + 0,099) \\ &= 0,47 \end{aligned}$$

A_2 und A_4

Berechne nun den Flächeninhalt A_2 und damit auch den Flächeninhalt A_4. Das Flächenstück A_2 setzt sich ebenfalls aus zwei symmetrischen und damit gleichgroßen Flächenstücken zusammen: Das Teilstück links der y-Achse und das Teilstück rechts der y-Achse. Betrachte demnach zuerst nur das rechte Teilstück der Fläche A_2 und verdopple dessen Inhalt anschließend.



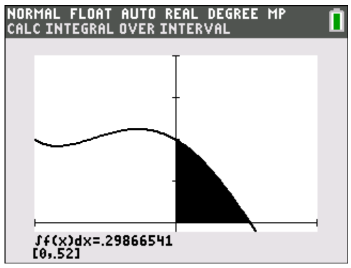
Bei dem Flächenstück rechts der y-Achse handelt es sich um die Fläche zwischen dem Graphen von f und dem Graphen von g_1 vom Ursprung bis zum Schnittpunkt S_1.

Den Inhalt der Fläche zwischen den beiden Graphen von zwei Funktionen f und g berechnest du über das Integral:

$A = \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) \mathrm{d}x \right|$.

In diesem Fall sind die Grenzen der Ursprung ($x_1 = 0$) und die Schnittstelle ($x_2 = 0,52$).

Damit ergibt sich: $A_2 = 2 \cdot \left| \int_0^{0,52} (f(x) - g_1(x)) \mathrm{d}x \right|$. Das Integral kannst du wie oben mit dem GTR berechnen, indem du $f(x) - g_1(x)$ als neuen Funktionsterm definierst. Du erhältst dann das Ergebnis: $A_4 = A_2 \approx 2 \cdot 0,30 = 0,60$. Die Flächenstücke A_1 und A_3 sind jeweils ca. $0,47$ m^2 groß. Die Flächenstücke A_2 und A_4 sind jeweils ca. $0,6$ m^2 groß.



► Geradengleichung bestimmen

Du sollst Funktionsterme der Ursprungsgeraden aufstellen, die durch die Wendepunkte des Graphen von f verlaufen. Eine Ursprungsgerade u durch einen Punkt $P(x_P \mid y_P)$ hat allgemein die Form:

$u(x) = \frac{y_P}{x_P} \cdot x$.

Berechne zuerst die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von f und setze diese anschließend in den oben stehenden Funktionsterm ein.

d) **► Abhängigkeit der x-Koordinaten zeigen** (10P)

Du sollst zeigen, dass für jedes k und $x > 0$ die x-Koordinate des Wendepunktes des Graphen von f_k immer dasselbe Vielfache der x-Koordinate des Tiefpunktes ist.

Die Funktionenschar f_k ist dir gegeben mit $f_k(x) = k \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 + 1$.

Berechne zuerst die x-Koordinaten der Tiefpunkte der Graphen von f_k (x_T) und anschließend die Koordinaten der Wendepunkte der Graphen von f_k (x_W).

Für Wendestellen gibt es zwei Kriterien:

- **notwendiges Kriterium:** Die zweite Ableitungsfunktion f_k'' hat bei x_W eine Nullstelle, also gilt $f_k''(x_W) = 0$ für das x_W, an dem sich die Wendestelle befindet.
- **hinreichendes Kriterium:** Die dritte Ableitungsfunktion f_k''' darf in x_W keine Nullstelle haben, also gilt $f'''(x) \neq 0$ für das x_W , an dem sich die Wendestelle befindet.

Genauso gibt es für Minimalstellen zwei Kriterien:

- **notwendiges Kriterium:** Die erste Ableitungsfunktion f_k' hat in x_W eine Nullstelle, also gilt $f_k'(x_T) = 0$ für das x_T, an dem sich die Minimalstelle befindet.
- **hinreichendes Kriterium:** Die zweite Ableitungsfunktion f_k'' darf in x_T keine Nullstelle haben, also gilt $f_k''(x_T) \neq 0$ für das x_T , an dem sich die Minimalstelle befindet.

Zeige anschließend, dass x_W immer dasselbe Vielfache von x_T ist.

Wenn dies der Fall ist, muss für ein konstantes a gelten: $a \cdot x_T = x_W$. Um die Behauptung zu zeigen, berechne also a und zeige so, dass a konstant ist, also nicht von k abhängt.