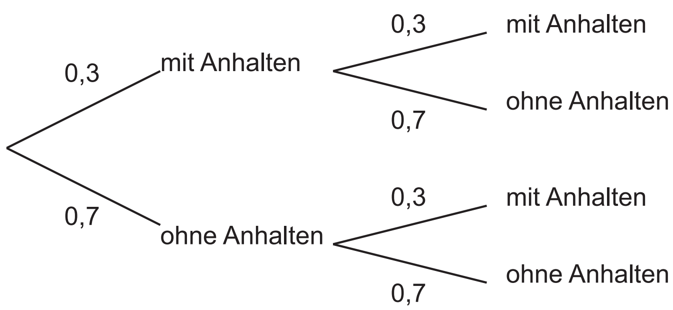
1.1 ▶ Herr Pendlers Rechnung und Annahme beschreiben (3P)

Du kannst Herr Pendlers Rechnung nachvollziehen, wenn du den Sachverhalt in einem Baumdiagramm darstellt. Dabei kannst du auf der ersten Stufe die erste Ampel und auf der zweiten Stufe die zweite Ampel darstellen.



Herr Pendler hat die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er an keiner der beiden Ampeln anhalten muss, nach der Pfadregel berechnet:

$P($an beiden Ampeln ohne Anhalten $= 0,7 \cdot 0,7 = 0,49$.

Er hat dafür die Annahme getroffen, dass die beiden Ampeln **unabhängig** voneinander geschaltet sind. Er geht also davon aus, dass er an der zweiten Ampel mit 70 % Wahrscheinlichkeit nicht anhalten muss, unabhängig davon, ob er an der ersten Ampel anhalten musste oder nicht.

1.2 ▶ Wahrscheinlichkeit für grüne Ampel berechnen (3P)

Du weißt nun: Die Wahrscheinlichkeit, beide Ampeln nacheinander überfahren zu können, liegt bei 0,58. Außerdem gilt für die erste Ampel immer noch, dass sie mit 70 % Wahrscheinlichkeit ohne Anhalten überquert werden kann.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auch die zweite Ampeln ohne anzuhalten überquert werden kann. Diese Wahrscheinlichkeit kannst du z.B. x nennen. Nach der Pfadregel folgt dann:

$$\begin{aligned} P(\text{an beiden Ampeln ohne Anhalten}0,7 \cdot x &= 0,58 \qquad |:0,7 \\ x &= 0,8286 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 82,86 % kann auch die zweite Ampel ohne anzuhalten überquert werden, wenn man davor die erste Ampel überquert hat.

2.1 ▶ Bedingungen für Bernoullikette erläutern (2P)

Die Geschwindigkeitsmessung kann als Bernoullikette interpretiert werden, wenn

- die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Fahrer nicht an die Geschwindigkeit hält, bei jedem Auto als gleich bleibend angenommen wird,
- insgesamt nur zwischen zwei möglichen Ausgängen, also z.B. „zu schnell“ und „nicht zu schnell“ unterschieden wird.

Gerade der erste Punkt kann im Modell kritisch betrachtet werden: Wenn mehrere Autos z.B. dicht aneinander in einer Reihe fahren und sich der erste Fahrer an die Geschwindigkeit hält, so halten sich auch die anderen Fahrer mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit an die Geschwindigkeit.
Auf eine große Masse gesehen ist diese Verallgemeinerung aber legitim.

2.2 ▶ **Wahrscheinlichkeiten berechnen** (7P)

X bezeichnet die Anzahl der Autofahrer, die geblitzt werden; dabei sollst du davon ausgehen, dass es sich bei der Geschwindigkeitskontrolle um eine Bernoullikette handelt. Dann ist die Zufallsvariable X binomialverteilt.

Du weißt, dass ein Autofahrer sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % an die Geschwindigkeit hält. Also werden 20 % der Autofahrer geblitzt. Als Parameter für die Binomialverteilung findest du den Stichprobenumfang $n = 20$ und die Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0,2$.

Berechne die drei Wahrscheinlichkeiten über die Formel zur Binomialverteilung:

Ereignis A

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 3 Autofahrer geblitzt werden. Dies ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = 3)$:

$$\begin{aligned} P(X=3) &= \binom{20}{3} \cdot (0,2)^3 \cdot (1-0,2)^{20-3} \\ &= \binom{20}{3} \cdot (0,2)^3 \cdot (0,8)^{17} \approx 0,2054 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 20,54 % werden genau 3 von 20 Autofahrern geblitzt.

Ereignis B

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 15 Autofahrer sich an die Geschwindigkeitsbegrenzung halten, also **nicht** geblitzt werden. Dann werden genau 5 Autofahrer geblitzt. Berechne also die Wahrscheinlichkeit $P(X = 5)$:

$$\begin{aligned} P(X=5) &= \binom{20}{5} \cdot (0,2)^5 \cdot (1-0,2)^{20-5} \\ &= \binom{20}{5} \cdot (0,2)^5 \cdot (0,8)^{15} \approx 0,1746 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 17,46 % halten sich genau 15 der 20 Autofahrer an die Geschwindigkeitsbegrenzung.

Ereignis C

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 3 Autofahrer geblitzt werden. Berechne also die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 3)$. Nutze dazu das Gegenereignis.

Du kannst die Wahrscheinlichkeit von Hand ober über eine Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung berechnen.

▶▶ **Lösungsweg A: Lösung von Hand**

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)) \end{aligned}$$

Ähnlich wie $P(X = 3)$ kannst du auch diese drei Wahrscheinlichkeiten berechnen:

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \binom{20}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^{20-0} \approx 0,0115 \\ P(X=1) &= \binom{20}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^{20-1} \approx 0,0576 \\ P(X=2) &= \binom{20}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^{20-2} \approx 0,1369 \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - (0,0115 + 0,0576 + 0,1369) \\ &= 0,794 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 79,4 % werden mindestens 3 Autofahrer geblitzt.

►► Lösungsweg B: Lösung mit Tabelle

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$$

In einer Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung mit $n = 20$ und $p = 0,2$ findest du den Wert

$P(X \leq 2) = 0,206$

und damit

$P(X \geq 3) = 1 - 0,206 = 0,794.$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 79,4 % werden mindestens 3 Autofahrer geblitzt.

2.3 **► Ansatz und Ergebnis erklären** (7P)

Die Zufallsvariable X kennst du bereits aus den vorhergehenden Aufgabenteilen: Sie bezeichnet die Anzahl der Autofahrer, die geblitzt werden. Die Wahrscheinlichkeit, geblitzt zu werden, lag dabei bei $0,2$.

Betrachte nun den Ansatz, die Rechnung und das Ergebnis im Kasten:

Die Ungleichung $P(X \geq 1) > 0,99$ drückt eine **Bedingung** aus, die erfüllt sein soll: Mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % soll X mindestens 1 sein; d.h. im Sachzusammenhang: Mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % soll mindestens einer der Autofahrer in der Stichprobe geblitzt werden.

In der zweiten Zeile wird diese Ungleichung nun über die Formel zur Binomialverteilung umgeformt. Das n bezeichnet dabei den unbekannten Stichprobenumfang der Zufallsvariable X. Die Berechnung erfolgt dabei über das Gegenereignis:

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &> 0,99 && \\ 1 - P(X = 0) &> 0,99 && X \text{ binomialverteilt mit } p = 0,2 \text{ und } n \text{ unbekannt} \\ 1 - \binom{n}{0} \cdot 0,2^0 \cdot (0,8)^{n-0} &> 0,99 && \binom{n}{0} = 1, \quad 0,2^0 = 1 \\ 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0,8^n &> 0,99 && \\ 1 - 0,8^n &> 0,99 && \end{aligned}$$

Diese Ungleichung wird nun **gelöst**, das Ergebnis ist der Stichprobenumfang n.

$$\begin{aligned} 1 - 0,8^n &> 0,99 && \mid -1 \\ -0,8^n &> -0,01 && \mid \cdot(-1) \\ 0,8^n &< 0,01 && \mid \ln(\ ) \\ \ln(0,8^n) &< \ln(0,01) && \text{Logarithmusregeln} \\ n \cdot \ln(0,8) &< \ln(0,01) && \mid : \ln(0,8) \\ n &> \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \approx 20,63 \approx 21 && \end{aligned}$$

Er ergibt sich zu $n \geq 21$.

Du kannst das Ergebnis so interpretieren:

Es müssen mindestens 21 Autofahrer kontrolliert werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens einer geblitzt wird.

3.1 **▶ Erwartungswert und Standardabweichung berechnen** (4P)

Wieder bezeichnet X die Anzahl der geblitzten Autofahrer. Wenn das Verhalten wie im Text beschrieben ist und nur noch 10 % der Autofahrer zu schnell fahren, so kann X als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 20$ und $p = 0,1$.

Für den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ einer binomialverteilten Zufallsgröße gilt allgemein:

$\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p}.$

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned}\mu &= 20 \cdot 0,1 = 2\\ \sigma &= \sqrt{20 \cdot 0,1 \cdot 0,9}\\ &= \sqrt{1,8} \approx 1,34\end{aligned}$$

3.2 **▶ Fehler erster und zweiter Art im Sachzusammenhang formulieren** (4P)

Die Nullhypothese, die getestet werden soll, ist $H_0 : p_0 \geq 0,2$. Diese Hypothese kann angenommen oder abgelehnt werden. Aus der Aufgabenstellung weißt du: Der Test gilt als „erfolgreich“, wenn höchstens zwei Autos geblitzt werden. Für die Nullhypothese $H_0 : p_0 \geq 0,2$ wird also der **Ablehnungsbereich** $\overline{A} = \{0\,;\,1\,;\,2\}$ gewählt. Im Test können Fehler auftreten:

- Wenn die Nullhypothese **wahr** ist und dennoch abgelehnt wird, spricht man von einem Fehler erster Art;
- wenn die Nullhypothese **falsch** ist und dennoch angenommen wird, spricht man von einem Fehler zweiter Art.

In diesem Fall lautet die Nullhypothese: „Mindestens 20 % der Autofahrer werden geblitzt“.

Ein Fehler erster Art liegt vor, wenn in Wirklichkeit tatsächlich **mindestens** 20 % der Autofahrer zu schnell fahren, ausgerechnet in diesem Test aber höchstens zwei geblitzt werden. Dann geht der Magistrat irrtümlicherweise davon aus, dass sich das Verhalten der Verkehrsteilnehmer deutlich verbessert hat.

Ein Fehler zweiter Art hingegen liegt vor, wenn der Anteil der Fahrer, die sich nicht an die Verkehrsregeln halten, in Wirklichkeit gesunken und **kleiner** als 20 % ist, aber ausgerechnet in diesem Test **mehr** als zwei Autofahrer geblitzt werden. In diesem Fall geht der Magistrat irrtümlich davon aus, dass sich das Verhalten der Autofahrer nicht verbessert hat, obwohl sich eine Verbesserung eingestellt hat.