a) (1) **► Rechnerisches Bestimmen der Nullstellen von g** (20 BE)

Die Nullstellen der Funktion g bestimmst du, indem du den Funktionsterm von g gleich null setzt. Die Funktion g besitzt folgende Nullstellen:

$$g(x) = 0$$
$$0 = x \cdot \mathrm{e}^{1-x} \qquad \text{Anwenden: „Satz vom Nullprodukt“}$$
$$0 = x$$

Da e^{1-x} für alle $x \in \mathbb{R}$ größer null ist, befindet sich die einzige Nullstelle von g bei $x_\mathrm{N} = 0$.

(2) **► Ermitteln der Extrempunkte des Graphen von f**

1. Schritt: Nullstellen der Ableitungsfunktion

Die Extremstellen der Funktion g befinden sich da, wo deren zugehörige erste Ableitungsfunktion g' Nullstellen besitzt. Leite g also zuerst ab:

$$g(x) = x \cdot \mathrm{e}^{1-x}$$

$$g'(x) = \mathrm{e}^{1-x} + x \cdot (-1) \cdot \mathrm{e}^{1-x} \qquad \text{Anwenden: Produktregel}$$
$$g'(x) = \mathrm{e}^{1-x} - x \cdot \mathrm{e}^{1-x}$$
$$g'(x) = \mathrm{e}^{1-x} \cdot (1-x)$$

Nullstellen von g':

$$0 = \mathrm{e}^{1-x} \cdot (1-x) \qquad \text{Anwenden: „Satz vom Nullprodukt“}$$

Da e^{1-x} hier ebenfalls für alle $x \in \mathbb{R}$ größer null ist, kann dieser Teil des Funktionsterms der Ableitungsfunktion auch hier vernachlässigt werden.

$$0 = 1 - x \qquad | +x$$
$$x_\mathrm{E} = 1$$

2. Schritt: Bestimmen der Art der Extremstelle

Ob sich an der von dir bestimmten Extremstelle x_E eine lokale Maximal- oder Minimalstelle befindet, bestimmst du, indem du diese Stelle in die zweite Ableitung g'' von g einsetzt. Nimmt diese für die Extremstelle x_E einen Wert größer null an, so befindet sich bei x_E eine lokale Minimalstelle, nimmt sie hingegen für die Extremstelle x_E einen Wert kleiner null an, so befindet bei x_E eine lokale Maximalstelle.
Zweite Ableitung g'' von g:

$$g'(x) = \mathrm{e}^{1-x} \cdot (1-x)$$

$$g''(x) = -\mathrm{e}^{1-x} \cdot (1-x) - \mathrm{e}^{1-x}$$
$$g''(x) = -\mathrm{e}^{1-x} \cdot ((1-x)+1)$$
$$g''(x) = -\mathrm{e}^{1-x} \cdot (2-x)$$

Überprüfen der Extremstelle x_E:

$$g''(x_\mathrm{E}) = -\mathrm{e}^{1-1} \cdot (2-1)$$
$$g''(x_\mathrm{E}) = -1 \cdot 1$$
$$g''(x_\mathrm{E}) = -1$$

$\Rightarrow$ Bei der bestimmten Extremstelle x_E befindet sich ein lokales Maximum.

3. Schritt: Berechnen der y - Koordinate der Extremstelle

Bestimme die y - Koordinate der Extremstelle x_E, indem du diese in den Funktionsterm von g einsetzt:

$$g(x_E) = 1 \cdot e^{1-1}$$
$$g(x_E) = 1 \cdot 1$$
$$g(x_E) = 1$$

Der Graph von g besitzt bei $H(1 \mid 1)$ einen Hochpunkt.

(3) ▶ **Berechnen des Wendepunkts mit Hilfe der notwendigen Bedingung**

Die notwendige Bedingung für eine Wendestelle ist: $g''(x) = 0$.
Die zweite Ableitungsfunktion g'' von g hast du bereits im vorhergegangenen Aufgabenteil bestimmt, ermittle wie folgt die Nullstellen dieser Ableitungsfunktion:

$$g''(x) = 0$$
$$0 = -e^{1-x} \cdot (2-x) \qquad \text{Anwenden: „Satz vom Nullprodukt" (da } -e^{1-x} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ ungleich null)}$$
$$0 = 2 - x \qquad \mid +x$$
$$x_W = 2$$

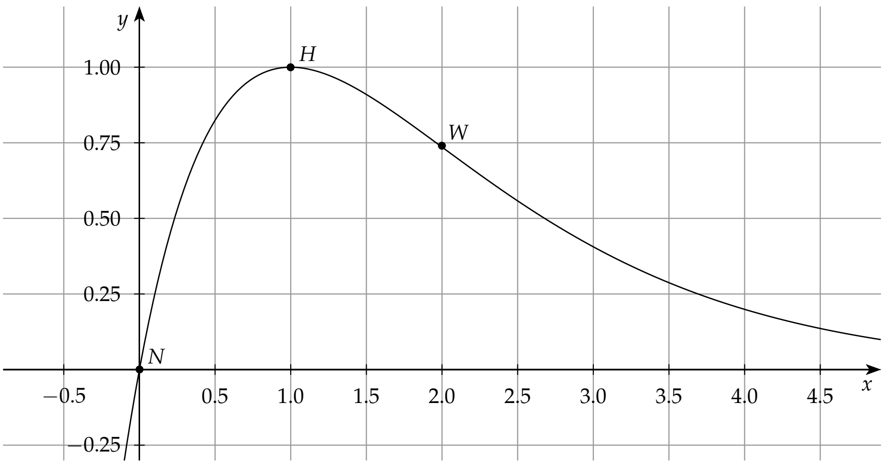
Die Wendestelle von g befindet sich bei $x_W = 2$. Bestimme durch Einsetzten von x_W in den Funktionsterm von g die zur Wendestelle zugehörige y - Koordinate:

$$g(x_W) = 2 \cdot e^{1-2}$$
$$g(x_W) = 2 \cdot e^{-1} \; (\approx 0{,}74)$$

Die Koordinaten des Wendepunktes W des Graphen von g sind: $W(2 \mid 2 \cdot e^{-1})$.

(4) ▶ **Festlegen einer Skala und Einzeichnen der ermittelten Punkte**

Der Hochpunkt des Graphen der Funktion g befindet sich bei $H(1 \mid 1)$. Da du diesen direkt in die Abbildung einzeichnen kannst, legst du mit diesem die Skalen der Achsen fest.
Deine Zeichnung sollte so aussehen:



(5) ▶ **Bestimmen der Grenzwerte und Begründen des Verlaufs**

(1) Grenzwert: $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \left(x \cdot \underbrace{e^{(1-x)}}_{\to 0} \right) = 0$$

Da die Exponentialfunktion ein stärkeres Wachstum als der lineare Teil der Funktionsgleichung von g besitzt, wird dieser bei der Grenzwertbetrachtung nicht weiter betrachtet. Nähert sich der der Exponent der Exponentialfunktion wie oben $-\infty$ an, so wird der Betrag der Exponentialfunktion immer kleiner und der Graph von f nähert sich für $x \to \infty$ der x - Achse in positiver Richtung an.

(2) Grenzwert: $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{(1-x)}}_{\to+\infty}\right) = -\infty$$

Die Exponentialfunktion besitzt auch hier ein stärkeres Wachstum als der lineare Teil der Funktionsgleichung von g. Da der Exponent der Exponentialfunktion für $x \to -\infty$ gegen $+\infty$ strebt, wird der Betrag der Exponentialfunktion immer größer. Da der lineare Teil der Funktionsgleichung von g für $x \to -\infty$ negativ wird, geht der Graph von g für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$.

b) (1) ▶ **Zeigen, dass G Stammfunktion von g ist** (12 BE)

Dass G eine Stammfunktion von g ist zeigst du, indem du den Funktionsterm von G ableitest. Entspricht der Funktionsterm der Ableitungsfunktion von G dem Term von g, so hast du gezeigt, dass G eine Stammfunktion von g ist:

$$G(x) = -(x+1)\cdot \mathrm{e}^{1-x}$$

$$\begin{aligned}
G'(x) &= -1\cdot \mathrm{e}^{1-x} + \left(-(x+1)\cdot(-1)\cdot \mathrm{e}^{1-x}\right)\\
G'(x) &= -\mathrm{e}^{1-x} + (x+1)\cdot \mathrm{e}^{1-x}\\
G'(x) &= -\mathrm{e}^{1-x} + x\cdot \mathrm{e}^{1-x} + \mathrm{e}^{1-x}\\
G'(x) &= x\cdot \mathrm{e}^{1-x}
\end{aligned}$$

Da der Funktionsterm der ersten Ableitungsfunktion G' von G dem Funktionsterm von g entspricht, hast du gezeigt, dass G eine Stammfunktion von g ist.

(2) ▶ **Berechnen des Integrals**

Die Grenzen des Integrals kannst du der von dir im Aufgabenteil a skalierten Abbildung entnehmen, diese sind: $x_\mathrm{u} = 0$ und $x_\mathrm{o} = 1$. Verwende zum Integrieren in der Aufgabenstellung angegebene Stammfunktion G von g.
Berechne den Wert des Integrals so:

$$I = \int_{x_\mathrm{u}}^{x_\mathrm{o}} g(x)\mathrm{d}x = [G(x)]_0^1 = \left[-(x+1)\cdot \mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1$$

$$\begin{aligned}
&= \left[-(1+1)\cdot \mathrm{e}^{1-1}\right] - \left[-(0+1)\cdot \mathrm{e}^{1-0}\right]\\
&= \left[-2\cdot \mathrm{e}^{0}\right] - \left[-1\cdot \mathrm{e}^{1}\right]\\
&= -2 + \mathrm{e}^{1}
\end{aligned}$$

Der Wert des zu berechnenden Integrals ist: $I = -2 + \mathrm{e}^1$ ($\approx 0{,}72$).

(3) ▶ **Bestimmen des Inhalts der Fläche A(u)**

Den Inhalt der Fläche $A(u)$ in Abhängigkeit der Variablen u bestimmst du über ein Integral. Die obere Grenze des Integrals wird durch die Parallele zur y - Achse bei $x = u$ definiert. Da der Graph von g in negativer x - Richtung keine Fläche mit der x - Achse einschließt, ist $x = 0$ die untere Grenze des zu bestimmenden Integrals.
Bestimmen von $A(u)$:

$$A(u) = \int_0^u g(x)\mathrm{d}x = [G(x)]_0^u = \left[-(x+1)\cdot \mathrm{e}^{1-x}\right]_0^u$$

$$= \left[-(u+1)\cdot \mathrm{e}^{1-u}\right] - \left[-(0+1)\cdot \mathrm{e}^{1-0}\right]$$

$$= -(u+1)\cdot \mathrm{e}^{1-u} - \left[-1\cdot \mathrm{e}^{1}\right]$$

$$= -(u+1)\cdot \mathrm{e}^{1-u} + \mathrm{e}$$

(4) ▶ **Berechnen des Grenzwertes**

Den Grenzwert von $A(u)$ für $u \to \infty$ bestimmst du hier so:

$$\lim_{u\to\infty} A(u) = \lim_{u\to\infty}\left(-(u+1)\cdot \underbrace{\mathrm{e}^{1-u}}_{\to 0}\right) + \mathrm{e} = \mathrm{e}$$

Da auch hier die Exponentialfunktion stärker wächst als der lineare Teil des Funktionsterms, wird auch hier dieser hauptsächlich betrachtet. Da der Exponent der Exponentialfunktion gegen $-\infty$ strebt, strebt der Betrag der Exponentialfunktion gegen 0. Da der hintere Summand e konstant ist, entspricht dieser dem Grenzwert der von A für $u \to \infty$.

c) (1) ▶ **Angeben des Funktionsterms und Skizzieren des Graphen** (8 BE)

1. Schritt: Angeben des Funktionsterms

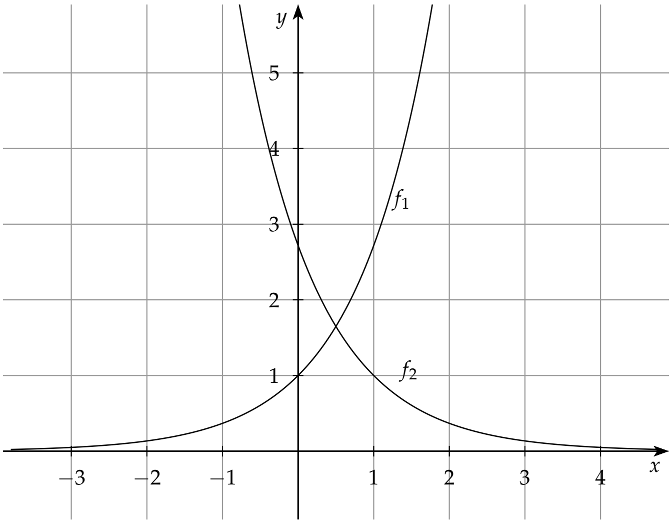
Will man eine Funktion an der y - Achse spiegeln, so versieht man jedes im Exponenten der Exponentialfunktion auftretende x mit einem negativen Vorzeichen. Will man eine Funktion um einen konstante Faktor strecken oder stauchen, so multipliziert man den gesamten Funktionsterm mit dem jeweiligen Faktor.
Aus diesen Informationen ergibt sich der Funktionsterm für f_2:

$$f_2(x) = (\mathrm{e}^{-x})\cdot \mathrm{e} = \mathrm{e}^{-x+1}$$

2. Schritt: Skizzieren des Funktionsterms

Beim Zeichnen des Graphen der Funktion f_2 kannst du dich am Graphen der Funktion f_1 orientieren. Das heißt du spiegelst den von Graphen f_1 und vergrößerst diesen um den Faktor $\mathrm{e} \approx 2{,}7$.

Es sollte sich hier dieses Schaubild hier ergeben:



(2) ▶ **Bestimmen der Funktionsterme und Angeben der Koordinaten**

1. Schritt: Bestimmen des Funktionsterms von f_3

Bei dem Graphen der Funktion f_3 handelt es sich um eine Ursprungsgerade. Berechne über die Steigungsformel für Geraden die Steigung m dieser Ursprungsgeraden.
Hier wird die Steigung m mit Hilfe der Punkte P_1 und P_2 berechnet:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$m = \frac{1-0}{1-0}$$
$$m = 1$$

Funktionsterm von f_3:
$f_3(x) = 1 \cdot x$

2. Schritt: Bestimmen des Funktionsterms von f_4

Beim Graphen der Funktion f_4 handelt es sich um eine an der y - Achse gespiegelte und in x - Richtung verschobene Exponentialfunktion. Dies ist am Verlauf der Funktion und an dem Schnittpunkt von f_4 mit der y - Achse zu erkennen. Spiegle den Funktionsterm von f_4 wie im Aufgabenteil zuvor und berechne die Verschiebung in x - Richtung über eine Punktprobe mit dem Schnittpunkt von f_4 mit der y - Achse bei $S(0 \mid e)$. a entspricht hier der Verschiebung in x - Richtung:

Berechnen der Verschiebung a:

$$f_4(x) = \mathrm{e}^{-x-a}$$
$$\mathrm{e} = \mathrm{e}^{-0-a}$$
$$\mathrm{e} = \mathrm{e}^{-a} \qquad | \; ln()$$
$$1 = -a$$
$$a = -1$$

Der Funktionsterm von f_4 ist:
$f_4(x) = \mathrm{e}^{-x+1}$.

3. Schritt: Berechnen des Funktionsterms von h

Den Funktionsterm von h berechnest du, indem du das Produkt der Funktionsterme von f_3 und f_4 bildest:

$$h(x) = f_3(x) \cdot f_4(x)$$
$$h(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x+1}$$

Da $g(x) = h(x)$ gilt, hast du gezeigt, dass die Funktionsterme von g und h übereinstimmen.

4. Schritt: Bestimmen der gesuchten Koordinaten

Die zu den Punkten P_3 und P_4 zugehörigen y - Koordinaten bestimmst du, indem du jeweiligen x - Koordinaten der Koordinaten bei $x_3 = 2$ und $x_4 = 3$ in den Funktionsterm von h einsetzt:

Punkt P_3:

$$h(x_3) = x_3 \cdot \mathrm{e}^{-x_3+1}$$
$$h(x_3) = 2 \cdot \mathrm{e}^{-2+1}$$
$$h(x_3) = 2 \cdot \mathrm{e}^{-1} \ (\approx 0,74)$$

Punkt P_3:

$$h(x_4) = x_4 \cdot \mathrm{e}^{-x_4+1}$$
$$h(x_4) = 3 \cdot \mathrm{e}^{-3+1}$$
$$h(x_4) = 3 \cdot \mathrm{e}^{-2} \ (\approx 0,41)$$

Die gesuchten Koordinaten der Punkte sind: $P_3(2 \mid 2 \cdot \mathrm{e}^{-1})$ und $P_4(3 \mid 3 \cdot \mathrm{e}^{-2})$.